



UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
VOLTA REDONDA



Volta Redonda-RJ
10 a 12 de setembro de 2025

ANAIS DO XI SIMPÓSIO DE MATEMÁTICA DA REGIÃO SUL FLUMINENSE



www.simma.uff.br

Apoio



Universidade Federal Fluminense

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

**Anais do XI Simpósio de Matemática da Região
Sul Fluminense**

2025

ISBN: 978-65-01-62919-3

Comissão Organizadora

Marina Sequeiros Dias de Freitas
Ivan Wilber Aguilar Maron
Jordan Lambert Silva
Carlos Henrique Pereira do Nascimento
Wellington Carlos de Jesus
Honório Joaquim Fernando

Comissão Científica

Ivan Wilber Aguilar Maron
Honório Joaquim Fernando
Jordan Lambert Silva

Chefia do Departamento de Matemática

Wellington Carlos de Jesus

Comissão Editorial: Marina Sequeiros Dias de Freitas e Ivan Wilber Aguilar Maron

Sumário

1	Apresentação	1
2	Programação	3
3	Minicursos	4
3.1	Introdução à Análise Intervalar e Aplicações em Otimização e Controle	4
3.2	Introdução aos Sistemas Dinâmicos	4
3.3	Introdução ao LaTeX com Apoio de Ferramentas de IA	5
3.4	Uma Introdução à Análise de Problemas Parabólicos Lineares em Espaços de Hilbert	5
3.5	Financiamento Imobiliário: Qual é melhor, Price ou SAC?	5
4	Palestras	7
4.1	Teorema de Pick: explorando relações entre geometria e topologia na educação básica	7
4.2	Toda matriz $n \times n$ é “quase” diagonalizável	7
4.3	Moonshine: álgebra e geometria em 24 dimensões	7
4.4	Uso de Modelos de Aprendizado de Máquina para Detectar Textos Criados por IA	8
4.5	Modelos Matemático e Computacional Aplicados à Indústria do Petróleo	8
4.6	Desempenho térmico de trocadores de calor solo-ar: modelagem, experimentação e aplicações regionais	8
5	Resumos dos pôsteres	10
	Arthur Iure Vianna Fernandes; Marina Sequeiros Dias de Freitas - <i>Estudo de K-Means com aplicação no Processamento de Imagens</i>	11
	Brayan Vinícius Neves Gonçalves; Marina Sequeiros Dias de Freitas; Vera Lucia Prudência Dos Santos Caminha - <i>Análise de Componentes Principais: Fundamentos e Aplicações Práticas</i>	13
	Carlos Roberto de Souza Araújo; Wellington Carlos de Jesus - <i>Estudo do Método de Numerov Clássico e Aplicação à Equação Radial de Schrodinger</i>	15
	Carlos Andre Burity Silva; Alessandro Gaio Chimenton - <i>Decomposição em Valores Singulares e aplicação em Compressão de Imagens</i>	17
	Kauan Santos Amaral; Marina Ribeiro Barros Dias - <i>Estudo do Método de Otsu para segmentação de imagens</i>	18
	Leonardo Vinícius; Jordan Lambert - <i>Fundamentos Matemáticos da Criptografia Moderna</i>	20

Lívia Pelegrino - <i>Detecção de Textos Gerados pelo ChatGPT com Técnicas de Mineração de Texto e Aprendizado de Máquina</i>	21
Lucas da S. Paiva; Marina Ribeiro Barros Dias - <i>Estimativa de Parâmetros do Modelo SIR Baseada na Dinâmica da População Infectada por COVID-19</i>	23
Lucas C. Teixeira; Marina Ribeiro Barros Dias; Wellington Carlos de Jesus - <i>Uma Abordagem Matemática para a Dinâmica da Contração Muscular no Modelo de Hill de Três Elementos</i>	26
Luiz Fernando de Oliveira Valva; Francisca Andrea Macedo França - <i>Diâmetro de alguns produtos de grafos via matriz distância</i>	28
Nathália Aparecida Cleto Burns; Carlos Henrique Pereira do Nascimento - <i>Introdução à Teoria Espectral de Grafos</i>	30
Pedro Frazão Dutra; Núbia Karla de Oliveira Almeida - <i>Impacto das características da doença na sobrevivência das pacientes com câncer de mama</i>	31
Raphael Modesto Malvão; Miguel Adriano Koiller Schnoor - <i>Introdução à Dinâmica Simbólica</i>	32
Richard Amarante Melo; Rafael Santos Erbisti - <i>Modelos Dinâmicos Bayesianos Generalizados de Defasagem Polinomial</i>	34
Sabrina Vizeu Marques de Oliveira; Marina Sequeiros Dias de Freitas - <i>Estudo de Métodos de Agrupamento Hierárquico com Aplicação no Conjunto de Dados Iris</i>	35
Victor Augusto do Carmo Duarte; Erito Marques de Souza Filho; Ronaldo Malheiros Gregório - <i>Modelagem e solução do school timetabling de uma escola pública estadual do Rio de Janeiro</i>	37
Victória Oliveira Porfhirio dos Santos; Marcela Lima Santos Pereira; Claudia Mazza Dias - <i>Impacto da Vacinação na Dinâmica da Transmissão do Sarampo: uma Abordagem via Modelagem Matemática</i>	39
Victor Aquino Landim; Leandro Gines Egea - <i>O grupo fundamental do Círculo</i>	41
Vitor Gabriel de Sousa Campbell; Wellington Carlos de Jesus - <i>Aritmética do Ponto Flutuante</i>	42
6 Resumos das Sessões Orais	43
Axl Silva de Andrade - <i>Otimização do fluxo de dados em uma rede Ad Hoc com Múltiplos Caminhos</i>	44
Breno Henrique de Freitas Rodrigues Jesuino; Israel Araújo Botelho; Nathália de Almeida Leite da Silva; Deumara Galdino de Oliveira - <i>O Papel da Educação Financeira no Ensino Básico: Uma Análise das Políticas Públicas e dos Desafios de Implementação</i>	46
Daniela Sano Apathi; Florencia Graciela Leonardi - <i>Modelo de Markov Oculto: algoritmo EM e amostrador de Gibbs</i>	48
Danilo Vasconcelos dos Santos; Alexander Gama Amaral; Érika de Carvalho Cabral da Silva; Carlos Andrés Reyna Vera-Tudela - <i>Geração de Aproximações do Método das Diferenças Finitas com 9 pontos para resolver a Equação de Laplace</i>	50
Lara Rodrigues Ventura; André Ebling Brondani; Francisca Andrea Macedo França - <i>Rotulação Antimágica Local dos Grafos Fireflies</i>	52

Roger Primolan; Kostiantyn Iusenko - <i>Extensões Controláveis</i>	54
Rogério Vaz de Almeida Jr.; Regina Serrão Lanzillotti - <i>O Impacto da Tecnologia no Ensino da Matemática: Uma Análise Estatística Multivariada Comparativa entre Metodologias Tradicionais e Inovadoras na Educação Básica</i>	55
Sheila Rodrigues de Almeida; Beatriz Cardoso Nascimento - <i>O Mecanismo de Atenção em Transformers: Uma Perspectiva Matemática</i>	57
Parcerias e patrocinadores	58

Capítulo 1

Apresentação

O Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal Fluminense, Campus Volta Redonda, realizou, em 2014, o primeiro Simpósio de Matemática da Região Sul Fluminense (SIMMA). Naquele ano, o professor Ivan Aguilar, então chefe do Departamento de Matemática, convidou o professor Marcelo Viana, pesquisador do IMPA, para apresentar uma palestra no Instituto de Ciências Exatas. O professor Marcelo Viana aceitou o convite com a condição de que fosse realizado um evento de Matemática e que sua palestra integrasse a programação desse evento. Assim nasceu o SIMMA.

A primeira edição ocorreu durante a Agenda Acadêmica da UFF e teve como objetivo apresentar pesquisas em diferentes áreas da Matemática e motivar os estudos dos alunos do curso de Matemática. Infelizmente, o professor Marcelo Viana não pôde participar dessa edição. Contudo, devido à grande participação dos alunos e aos elogios recebidos, decidiu-se dar continuidade ao simpósio anualmente. Em 2015, em razão da greve na universidade, não foi possível realizar o evento. Em 2016, o Departamento convidou novamente o professor Marcelo Viana, então diretor do IMPA, para a palestra de abertura, e ele pôde comparecer, abrilhantando o evento. Assim, ocorreu a segunda edição do Simpósio, com palestras e minicursos que contaram com grande público. Desde então, o evento vem sendo realizado todos os anos.

Em 2020 e 2021, durante o período da pandemia de COVID-19, o evento foi realizado de forma remota, e as palestras e minicursos estão disponíveis no canal do SIMMA no YouTube (@simmauff). Em 2021, o evento contou exclusivamente com palestrantes mulheres. Em 2022, o evento voltou a ser presencial, novamente com grande participação do público. Em 2024, ano de comemoração dos 10 anos do SIMMA, decidiu-se incluir uma sessão cultural, duas sessões orais para que alunos pudessem apresentar brevemente os resultados de suas pesquisas e uma mesa-redonda presencial com ex-alunos. Em 2025, manteve-se a sessão oral e foi criado o primeiro *anais* do evento, a fim de registrar todos os trabalhos aprovados e apresentados, além da programação completa.

O Simpósio de Matemática da Região Sul Fluminense é gratuito e aberto a estudantes, professores e demais interessados em Matemática. No âmbito regional, o evento cumpre importante papel ao estimular a pesquisa em Matemática na região Sul Fluminense, divulgar o Curso de Bacharelado em Matemática, com ênfase em Matemática Computacional, e motivar os alunos mediante o contato com potenciais áreas de atuação profissional. O evento tem como principal objetivo divulgar pesquisas

em Matemática e Matemática Computacional, tanto de professores e pesquisadores do Departamento de Matemática, responsável pela organização, quanto de profissionais de outras instituições renomadas.

A programação inclui palestras e minicursos relacionados às diversas áreas da Matemática, além da apresentação de trabalhos de iniciação científica na modalidade pôster e, desde 2024, de trabalhos de pesquisa na modalidade sessão oral. O evento é amplamente divulgado para incentivar a participação de alunos de outras universidades, contando com apoio da Pró-Reitoria de Extensão da UFF, da SBM e da SBMAC nessa divulgação, bem como com auxílio financeiro da FAPERJ em algumas edições, como a de 2025.

Capítulo 2

Programação

Horário	10/09/25 (quarta-feira)	11/09/25 (quinta-feira)	12/09/25 (sexta-feira)
08:00 - 10:00	Entrega de material (entrada bloco C)	MC1: sala 301B Ulcileia Leat (UFTM)	MC2: sala 301B Miguel Schnoor (UFF)
	MC1: sala 301B Ulcileia Leat (UFTM)		
10:00 - 12:00	MC2: sala 301B Miguel Schnoor (UFF)	MC3: sala 107B Ivan Aguilar (ICEx-UFF) & Deumara de Oliveira (IFRJ)	MC3: sala 107B Ivan Aguilar (ICEx-UFF) & Deumara de Oliveira (IFRJ)
12:00 - 13:00	A L M O Ç O		
13:00 - 13:30	Entrega de material (Auditório Bloco B)		
13:30 - 14:00	Abertura / entrega de material (Auditório)	Foto Oficial	SESSÃO DE PÔSTERES Auditório - sala 309B
14:00 - 15:00	Palestra 1 (PALESTRA DE ABERTURA) Walcy Santos (UFRJ)	Palestra 3 Jethro van Ekeren (IMPA)	
15:10 - 16:10	Palestra 2 Lucas Seco (UnB)	Palestra 4 Jessica Kubrusly (UFF)	Palestra 5 Sidarta Araújo Lima (UFRN)
16:10 - 16:40	C O F F E E B R E A K		
16:40 - 17:50	SESSÕES ORAIS (Auditório - sala 309B)	SESSÕES ORAIS (Auditório - sala 309B)	Palestra 6 (ENCERRAMENTO) Jairo Ramalho (UFPEL)
17:50 - 18:00	Sorteio de livros	Sorteio de livros	Sorteio de livros
18:00 - 20:00	MC4: sala 301B Honório Fernando (UFF)	MC4: sala 301B Honório Fernando (UFF)	
	MC5: sala 211C Tiago Soares dos Reis (IFRJ)	MC5: sala 211C Tiago Soares dos Reis (IFRJ)	

P A L E S T R A S (Auditório - SALA 309B)	
P1 - Palestra de abertura: Walcy Santos (UFRJ)	Teorema de Pick: explorando relações entre geometria e topologia na educação básica
P2: Lucas Seco (UnB)	Toda matriz $n \times n$ é "quase" diagonalizável
P3: Jethro van Ekeren (IMPA)	Moonshine: álgebra e geometria em 24 dimensões
P4: Jessica Kubrusly (UFF)	Uso de Modelos de Aprendizado de Máquina para Detectar Textos Criados por IA
P5: Sidarta Araújo Lima (UFRN)	Modelos Matemático e Computacional Aplicados à Indústria do Petróleo
P5 - Palestra de encerramento: Jairo Ramalho (UFPEL)	Desempenho térmico de trocadores de calor solo-ar: modelagem, experimentação e aplicações regionais

M I N I C U R S O S		
MC1: Ulcileia Leat (UFTM)	Introdução à Análise Intervalar e Aplicações em Otimização e Controle	301B
MC2: Miguel Schnoor (ICEx-UFF)	Introdução aos Sistemas Dinâmicos	301B
MC3: Ivan Aguilar (ICEx-UFF) & Deumara de Oliveira (IFRJ)	Introdução ao LaTeX com Apoio de Ferramentas de IA	107B
MC4: Honório Fernando (ICEx-UFF)	Uma Introdução à Análise de Problemas Parabólicos Lineares em Espaços de Hilbert	301B
MC5: Tiago Soares dos Reis (IFRJ)	Financiamento Imobiliário: Qual é melhor, Price ou SAC?	211C

Capítulo 3

Minicursos

3.1 Introdução à Análise Intervalar e Aplicações em Otimização e Controle

Profa. Dra. Ulcileia Leal (UFTM)

Este minicurso tem como objetivo introduzir os fundamentos da análise intervalar, com foco em aplicações em problemas de otimização e controle, considerando incertezas nos dados. A análise intervalar é uma ferramenta matemática moderna voltada à modelagem de situações em que há incertezas nos parâmetros, utilizando intervalos em vez de valores pontuais. O conteúdo será desenvolvido de forma acessível para estudantes de graduação, com ênfase conceitual e exemplos. Inicialmente, serão abordados os conceitos básicos da aritmética intervalar, destacando as diferenças entre a aritmética intervalar usual (proposta por Moore), a aritmética de Markov, a aritmética intervalar restrita (CIA) e a aritmética intervalar restrita single level. Serão discutidas as motivações históricas, limitações das abordagens tradicionais e as propriedades algébricas envolvidas. Na sequência, o minicurso explorará a definição de funções de valor intervalar, suas propriedades fundamentais, bem como os principais tipos de derivadas usadas em análise intervalar: derivada extremal e diferenciabilidade de Hukuhara (H-diferenciável e gH-diferenciável). Além disso, será desenvolvida a análise intervalar com base na aritmética restrita single level, destacando sua estrutura algébrica e vantagens em relação à aritmética usual, com aplicações em equações diferenciais intervalares e problemas de controle ótimo com variáveis intervalares. Por fim, serão discutidas aplicações simplificadas em problemas de otimização e controle ótimo com incertezas, destacando como a modelagem com variáveis intervalares pode representar cenários pessimistas e otimistas na tomada de decisão. Exemplos de aplicação, como o controle de plantas daninhas em lavouras, serão apresentados para contextualizar a aplicabilidade do conteúdo estudado.

3.2 Introdução aos Sistemas Dinâmicos

Prof. Dr. Miguel Schnoor (ICEx-UFF)

Este minicurso oferece uma introdução ao campo dos sistemas dinâmicos, área da matemática que estuda a evolução de sistemas ao longo do tempo. Sistemas

dinâmicos são modelos matemáticos que descrevem desde o movimento dos planetas e a previsão do tempo até a dinâmica de populações e as flutuações do mercado financeiro. O estudo de suas regras de evolução nos permite compreender e prever o comportamento futuro de diversos fenômenos, revelando padrões complexos e, por vezes, caóticos, a partir de regras determinísticas simples. Esta é uma ferramenta essencial para modelar a realidade e analisar sua complexa previsibilidade.

3.3 Introdução ao LaTeX com Apoio de Ferramentas de IA

Prof. Dr. Ivan Aguilar (ICEX-UFF) e Profa. Dra. Deumara de Oliveira (IFRJ)

O \LaTeX é um sistema de tipografia de alta qualidade para textos científicos, desenvolvido por Leslie Lamport na década de 1980 a partir do \TeX , criado por Donald Knuth nos anos 1970. Atualmente, é amplamente utilizado na comunidade acadêmica para a produção de artigos, teses e livros, destacando-se pela consistência na formatação e pela excelência na apresentação de expressões matemáticas.

Neste minicurso introdutório, estudaremos os fundamentos do \LaTeX e exploraremos o uso de ferramentas de inteligência artificial, como ChatGPT e Gemini, que poderão acelerar o aprendizado, oferecer soluções para dúvidas frequentes e otimizar o processo de escrita científica.

3.4 Uma Introdução à Análise de Problemas Parabólicos Lineares em Espaços de Hilbert

Prof. Dr. Honório Fernando (ICEX-UFF)

Problemas de evolução de primeira ordem surgem em diferentes cenários da modelagem matemática através de equações diferenciais parciais de fenomenologias de interesse prático nas mais diversas áreas do conhecimento. Neste minicurso, selecionamos o problema de Dirichlet para a equação do calor representando a família dos problemas parabólicos lineares, e por meio do qual, questões como equivalência entre problemas associados ao problema original, existência, unicidade e estabilidade da solução com respeito aos dados do problema, dominarão as discussões do minicurso. Para tanto, será usado o método de Galerkin como uma ferramenta auxiliar essencial.

3.5 Financiamento Imobiliário: Qual é melhor, Price ou SAC?

Prof. Dr. Tiago Soares dos Reis (IFRJ)

Qual a melhor forma de financiamento, Price ou SAC? E se for adiantar pagamentos, qual a melhor maneira, com redução no tempo ou redução nas prestações? No Brasil, são utilizadas duas modalidades de financiamento imobiliário. O Price é um sistema em que as prestações são constantes e o SAC é um sistema em que as

prestações são decrescentes. Surge, naturalmente, a questão: Qual é melhor, Price ou SAC? Neste minicurso, daremos uma demonstração matemática para a resposta dessa pergunta. Ainda, em financiamentos imobiliários, o cliente pode adiantar parte do pagamento da dívida. Existem duas opções sobre como ficará o financiamento após uma amortização antecipada. Na antecipação com redução do tempo as prestações seguem inalteradas e, conseqüentemente, a quantidade de prestações fica menor. Na antecipação com redução na prestação a quantidade de prestações segue inalterada e, conseqüentemente, as prestações ficam menores. Demonstraremos, no caso geral, qual forma de antecipação é mais vantajosa financeiramente.

Capítulo 4

Palestras

4.1 Teorema de Pick: explorando relações entre geometria e topologia na educação básica

Profa. Dra. Walcy Santos (UFRJ)

Nesta palestra apresentaremos o Teorema de Pick para cálculo de áreas de regiões poligonais com vértices sobre uma malha de pontos de coordenadas inteiras. Apresentaremos algumas aplicações e um recurso didático usando o Teorema de Pick. Numa segunda parte iremos apresentar o Teorema de Euler para regiões poligonais no plano e ver sua conexão com o Teorema de Pick.

4.2 Toda matriz $n \times n$ é “quase” diagonalizável

Prof. Dr. Lucas Seco (UnB)

O enunciado do título é um resultado fundamental de Álgebra Linear, mas que muitas vezes permanece pouco compreendido após um primeiro curso sobre o tema. O propósito dessa palestra é tornar esse enunciado mais preciso e o resultado mais familiar para estudantes de Álgebra Linear, seguindo um caminho distinto do usualmente apresentado nos livros-texto.

4.3 Moonshine: álgebra e geometria em 24 dimensões

Prof. Dr. Jethro van Ekeren (IMPA)

A matemática está cheia de conexões surpreendentes entre objetos de naturezas distintas – discretas vs. contínuas, algébricas vs. geométricas. Nesta palestra, vou contar sobre uma rede de interações particularmente misteriosa e fascinante, que envolve reticulados em 24 dimensões, álgebras de Lie e álgebras de vértices, formas modulares, e um grupo finito chamado de “monstro”. A palestra será expositiva na maior parte, mas vou terminar apresentando alguns avanços recentes na classificação de álgebras de vértices de ‘tipo moonshine’.

4.4 Uso de Modelos de Aprendizado de Máquina para Detectar Textos Criados por IA

Profa. Dra. Jessica Kubrusly (UFF)

O notável sucesso do ChatGPT e sua capacidade de gerar textos o tornaram uma ferramenta poderosa, que auxilia de forma significativa em diversas tarefas. Entretanto, sua aptidão para produzir artigos de opinião também levanta questões importantes, especialmente no que diz respeito à ética e ao plágio. Diante desse cenário, torna-se fundamental estudar formas de identificar textos gerados por inteligência artificial. Nesta apresentação, pretendo mostrar como técnicas de Mineração de Texto e Aprendizado de Máquina podem, em conjunto, desempenhar essa tarefa de maneira eficiente, alcançando resultados bastante promissores.

4.5 Modelos Matemático e Computacional Aplicados à Indústria do Petróleo

Prof. Dr. Sidarta Araújo Lima (UFRN)

A injeção de polímeros em reservatórios de petróleo representa uma técnica relevante para melhorar as curvas de produção de hidrocarbonetos. Nesta palestra, apresentamos uma modelagem matemática e computacional do processo de injeção de polímeros em reservatórios de petróleo. A modelagem matemática para hidrodinâmica dos fluidos é dada pela equação da conservação de massa das fases, bem como a lei de Darcy. Por sua vez, o transporte do polímero é regido pela equação de transporte em regime advectivo-dispersivo-reativo. A natureza reativa do transporte do polímero é modelada por leis de cinética expressas por equações diferenciais ordinárias. Do ponto de vista computacional, devido à heterogeneidade do termo de condutividade hidráulica, a hidrodinâmica é discretizada pelo método dos elementos finitos mistos dual. Por outro lado, devido à sua natureza hiperbólica, as equações da fase aquosa e do transporte do polímero são discretizadas pelo método dos volumes finitos explícito Central-Upwind. Finalmente, os métodos numéricos desenvolvidos são submetidos a testes de acurácia e precisão, demonstrando-se bastante robustos para descrever o processo de injeção de polímeros em reservatórios de petróleo.

4.6 Desempenho térmico de trocadores de calor solo-ar: modelagem, experimentação e aplicações regionais

Prof. Dr. Jairo Ramalho (UFPel)

Trocadores de calor solo-ar (TCSA) são sistemas passivos que reduzem a carga térmica em edificações por meio da troca de calor entre o ar em dutos enterrados e o solo. A estabilidade térmica da terra em certas profundidades permite que o sistema funcione como dissipador no verão e fonte de calor no inverno. Esta palestra

apresenta um balanço de pesquisas sobre o uso de TCSA, com modelos analíticos e numéricos validados por dados experimentais, focados na região sul do Brasil e norte do Uruguai. Também são analisados materiais galvanizados e de mudança de fase, além da aplicação da metodologia Constructal Design para otimizar a geometria do sistema. O estudo busca contribuir com soluções sustentáveis e recomendações práticas para a implementação de TCSA em contextos regionais.

Capítulo 5

Resumos dos pôsteres

Estudo de K-means com aplicação no processamento de imagens

Marina Sequeiros Dias de Freitas

Artur Iure Vianna Fernandes

Departamento de Matemática
Instituto de Ciências Exatas, UFF
Rua Desembargador Ellis Hermydio Figueira, Atarrado
27213-145, Volta Redonda, RJ
E-mail: msdias@id.uff.br iureartur@id.uff.br

RESUMO

Na inferência estatística tradicional é necessário um modelo prévio para analisar os dados, já na análise exploratória de dados, busca-se extrair estruturas latentes a fim de criar hipóteses sobre o comportamento dos fenômenos estudados. Para extrair padrões de um conjunto de dados que, a princípio, parece não ter uma estrutura clara, podem-se utilizar métodos de aprendizado não supervisionado, que buscam descobrir a estrutura oculta e os padrões intrínsecos nos dados por conta própria [1]. Esses algoritmos exploram as semelhanças e diferenças entre os pontos de dados para organizá-los de forma significativa. Neste trabalho, estudamos os métodos de agrupamento ou *clustering*. Em particular, abordamos o método *k*-médias, também conhecido como *k-means*.

A análise de agrupamento tem como intuito dividir a amostra em grupos similares, chamados *clusters*. O método *k-means* pode ser entendido como um problema de otimização, cujo objetivo é agrupar pontos de dados de modo que a inércia seja minimizada. A inércia é definida como a soma da variabilidade de todos os *clusters*, a variabilidade, por sua vez, é a soma dos quadrados da distância euclidiana entre cada ponto de dado e o centroide de seu respectivo *cluster*. A solução global desse problema pode ser muito exigente computacionalmente, mas o algoritmo *K-Means* fornece soluções aproximadas [2].

O algoritmo *K-Means* aplica uma heurística simples: são inicializados K centroides, de acordo com uma estratégia escolhida, onde cada centroide representa um *cluster*; os elementos do conjunto de dados são atribuídos ao *cluster* cujo centroide está mais próximo e, finalmente, calcula-se a média dos elementos do *cluster* para atualizar a posição do centroide. Os passos de atribuição de elementos e atualização dos centroides são repetidos até que a variação na posição dos centroides se torne insignificante [1].

Neste estudo, utilizamos dados simulados para explicar o *K-Means* e também aplicamos o algoritmo no processamento de imagens, com objetivo de reduzir o número total de cores. O processamento consiste em agrupar os pixels a partir de suas cores e, uma vez agrupados, a cor de cada pixel é alterada para o valor representado pelos centroides. Isso ajuda a isolar objetos de interesse do fundo. Desse modo, regiões com cores similares são agrupadas, destacando diferentes elementos da cena, como o céu, a grama, ou objetos específicos. Isso é particularmente útil em campos como a visão computacional, imagens médicas (para identificar tumores ou tecidos) e em veículos autônomos (para diferenciar pedestres, carros e a estrada). Além disso, o número de centroides se torna o número de cores da imagem processada [3]. Com a paleta de cores em mãos, podemos exportar a imagem no formato `.png`, reduzindo seu tamanho. Isso economiza espaço de armazenamento e tempo de processamento, sem comprometer a percepção humana da imagem.

A fim de escolher um número ideal de centroides, aplicamos o método do cotovelo. Esse método consiste em analisar a inércia do agrupamento para cada escolha de K em um intervalo. Com o gráfico da inércia, faz-se uma escolha de modo a achar o ponto em que aumentar o número de K nos traz apenas melhorias insignificantes. Como exemplo, processamos a figura 2 usando *K-Means* e utilizamos o método do cotovelo para determinar um valor de K . O gráfico gerado a partir desse método pode ser visto na figura 1. Pode-se ver que a partir de $K = 13$, a variação da inércia a cada incremento de K começa a reduzir drasticamente.

Observa-se que, ao aplicarmos o algoritmo com $K = 13$ (figura 3), preservamos grande parte das características originais da imagem, mesmo que ocupe apenas 12% do tamanho da original. Conclui-se que o método *K-Means* pode ser uma ferramenta importante no processamento de imagens, útil para compressão, desde que a perda de informação seja tolerável.

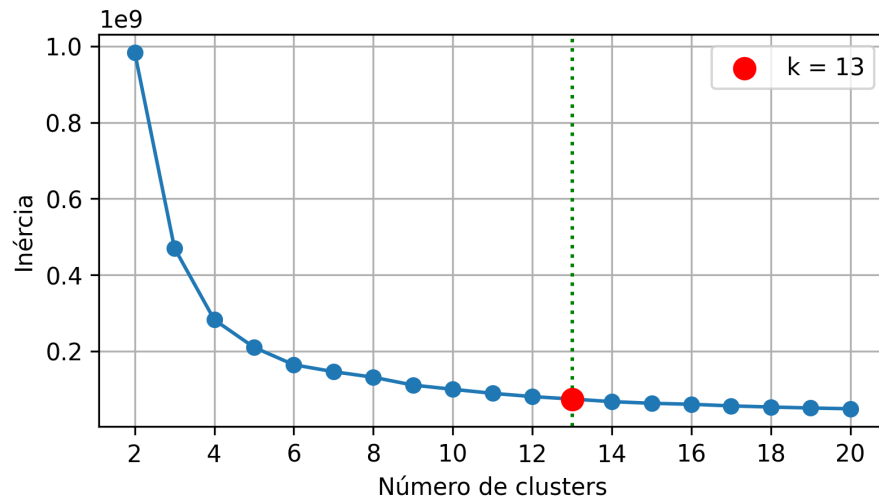


Figura 1: Método do cotovelo



Figura 2: Original, 372KB.



Figura 3: $K = 13$, 41KB.

Referências

- [1] Johnson, R. A.; Wichern, D. W. **Applied Multivariate Statistical Analysis**. 5th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.
- [2] James, G., Witten, D., Hastie, T., & Tibshirani, R. **An introduction to statistical learning: With applications in R**. Springer, 2013.
- [3] Izbicki, R. e Santos, T. M. dos. **Aprendizado de máquina: uma abordagem estatística**. 1ª edição. 2020. 272 páginas. ISBN: 978-65-00-02410-4. Disponível em: <https://rafaelizbicki.com/ame/>. Acesso em: 14/08/2025.

Análise de Componentes Principais: Fundamentos e Aplicações Práticas

Marina Sequeiros Dias de Freitas

Brayan Vinícius Neves Gonçalves

Departamento de Matemática, UFF

Rua Des. Ellis Hermydio Figueira, 783

27213-145, Volta Redonda, RJ

E-mail: msdias@id.uff.br

brayanneves@id.uff.br

Vera Lucia Prudência Dos Santos Caminha

Departamento de Física, UFF

Rua Des. Ellis Hermydio Figueira, 783

27213-145, Volta Redonda, RJ

E-mail: veraprudencia@id.uff.br

RESUMO

A Análise de Componentes Principais (PCA, do inglês Principal Component Analysis) é uma técnica estatística para análise multivariada, cuja principal ideia é reduzir a dimensionalidade de um conjunto de dados, transformando um conjunto de variáveis correlacionadas em um novo conjunto com variáveis não correlacionadas, denominadas *componentes principais*. Essa redução simplifica a análise, facilita a visualização, auxilia na remoção de multicolinearidade e permite filtrar ruídos, ao descartar componentes que explicam pouca variabilidade [1] [2]. Neste trabalho, apresentaremos a fundamentação teórica da PCA com uso de exemplos para melhor compreensão do método, seguida de aplicações com dados simulados e reais utilizando a linguagem Python.

Seja $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$, com m observações e n variáveis. O objetivo é encontrar combinações lineares das variáveis originais que maximizem a variância dos dados pela projeção em um novo sistema de coordenadas. Após centralizar as variáveis (subtraindo suas médias), calculamos a matriz de covariância:

$$S = \frac{1}{m-1} X^T X.$$

A matriz S é simétrica e admite decomposição espectral:

$$Sw_i = \lambda_i$$

onde λ_i é o autovalor associado ao autovetor w_i . Os autovalores indicam a quantidade de variância capturada por cada componente, enquanto os autovetores definem as direções (eixos) dos novos componentes.

A importância relativa de cada componente é dada pela variância explicada:

$$VE_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^n \lambda_j}.$$

O somatório acumulado da variância explicada nos permite decidir quantos componentes devemos manter para atingir um nível desejado de representação (por exemplo, 95% da variabilidade total). O resultado da PCA é a projeção dos dados nos vetores próprios correspondentes aos maiores autovalores. Esse procedimento mantém as dimensões mais informativas e descarta ruídos ou redundâncias.

Entre as aplicações mais comuns e relevantes da PCA está na sua utilização para o pré-processamento de dados em modelos de aprendizado, como classificação e regressão. No caso do conjunto de dados Iris (conjunto clássico que contém quatro medidas de pétalas e sépalas de três espécies de flores), a PCA pode reduzir as quatro variáveis originais para um espaço de duas ou três dimensões, preservando a maior parte da variância. Essa transformação permite uma visualização mais clara dos agrupamentos presentes nos dados, além de também poder melhorar o desempenho de classificadores supervisionados, reduzindo ruídos e correlação redundante entre as variáveis. Na figura 1, temos a projeção dos dados íris em suas duas primeiras componentes principais.

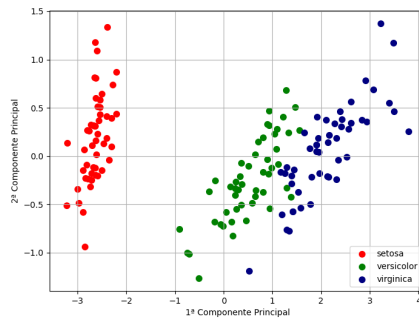


Figura 1: Projeção dos dados íris em suas duas primeiras componentes principais.

Outra aplicação prática da PCA é a compressão de imagens, explorando a redundância de informações nos pixels [3]. No procedimento, a imagem é separada em seus três canais de cor (vermelho, verde e azul). Em seguida, é aplicado a PCA em cada canal individualmente, retendo apenas um número reduzido de componentes principais que capturam a maior parte da variabilidade presente no canal. Posteriormente, a imagem é reconstruída por meio da transformação inversa, resultando em uma imagem visualmente semelhante à original, mas com menor volume de dados, mostrando o equilíbrio entre compactação e qualidade visual.

Para determinar o número ideal de componentes principais a serem retidas para a redução de dimensionalidade, utilizamos o método do cotovelo. A figura 2 mostra o ponto onde a curva forma um cotovelo indicando o número de componentes principais que capturam a maior parte da variância. A imagem original e a imagem com 131 componentes principais (retendo 95% da variabilidade) podem ser observadas na figura 3.

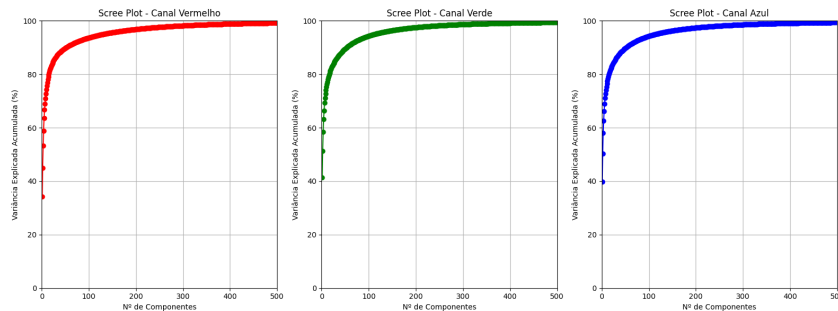


Figura 2: Gráfico do cotovelo (*Scree Plot*) para os três canais de cores.

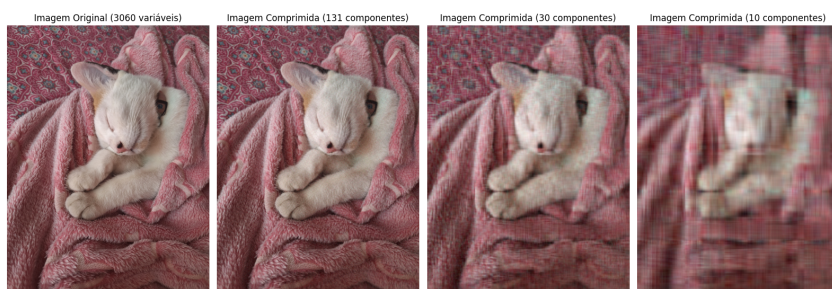


Figura 3: Imagem original e comprimida usando PCA, com 131, 30 e 10 componentes.

Referências

- [1] JOLLIFFE, I. T. **Principal component analysis for special types of data**. Springer, 2002.
- [2] IZBICKI, R.; SANTOS, T. M. **Aprendizado de máquina: uma abordagem estatística**. 1ª edição, 2020.
- [3] OLIVEIRA, J. V. **Estudo da Decomposição em Valores Singulares e Análise Dos Componentes Principais**, 2016.

Estudo do Método de Numerov Clássico e Aplicação à Equação Radial de Schrodinger

Carlos Roberto de Souza Araújo

Departamento de Física - ICEX, UFF
R. Des. Ellis Hermydio Figueira, 783
27213-145, Volta Redonda, RJ
E-mail: carlos_r@id.uff.br

Wellington Carlos de Jesus

Departamento de Matemática - ICEX, UFF
R. Des. Ellis Hermydio Figueira, 783
27213-145, Volta Redonda, RJ
E-mail: wellingtonjesus@id.uff.br

RESUMO

O problema de valor inicial (PVI) da seguinte forma é considerado:

$$\psi''(x) = f(x, \psi), \quad \psi(x_0) = \psi_0, \quad \psi'(x_0) = \psi'_0 \quad (1)$$

com $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\psi_0, \psi'_0 \in \mathbb{R}$. A equação (1) é usada para modelar vários problemas físicos. Observe que a primeira derivada (ou seja, ψ') não está incluída em (1). Um dos esquemas mais comuns que lidam com (1) é o método clássico de Numerov, também nomeado na literatura por método de Fox-Goodwin, método de Cowell ou método de Stormer-Cowell [2]. Usando este método, podemos propagar a aproximação numérica da solução de x_n para $x_{n+1} = x_n + \delta$, de acordo com a seguinte fórmula de quarta ordem algébrica:

$$\psi_{n+1} = -\psi_{n-1} + 2\psi_n + \frac{\delta^2}{12}(10f_n + f_{n+1} + f_{n-1}) \quad (2)$$

com $\psi_n \approx \psi(x_n)$ e $f_n \approx \psi'' = f(x_n, \psi_n)$, Note que $f_n, \psi_n \in \mathbb{R}$. Originalmente desenvolvido por Boris Vasil'evich Numerov [5, 6], o método foi ao longo dos anos sendo aprimorado e hoje existe uma família de métodos do tipo Numerov [2, 4]. Uma maneira de obter um processo de integração mais eficiente consiste em construir métodos numéricos com uma ordem algébrica aumentada. Por outro lado, a construção e implementação de métodos de alta ordem algébrica não é evidente. Uma maneira alternativa consiste em considerar métodos que levem em conta a natureza do problema. Duas propriedades importantes a serem consideradas são o atraso de fase (*phase lag*) e a amplificação. Na verdade, esses são dois tipos diferentes de erros de truncamento. O primeiro é o ângulo entre a solução analítica e a solução numérica, enquanto o segundo é a distância de uma solução cíclica padrão [3].

O trabalho foi iniciado com o desenvolvimento do algoritmo do Numerov clássico, considerando a princípio que a solução é conhecida em dois pontos subsequentes de um intervalo $[a, b]$, por exemplo, em $\psi(x - \delta)$ e $\psi(x)$, onde δ é uma quantidade arbitrariamente pequena. O ponto de partida foi a expansão de $\psi(x \pm \delta)$ em séries de Taylor, até derivadas de quarta ordem. A seguir foram somados os termos $\psi(x + \delta)$ e $\psi(x - \delta)$ obtendo-se uma expressão com valores da função ψ em três pontos e sua derivada segunda. O truque do método, [2], está em aplicar a esta expressão o operador $(1 + \frac{\delta^2}{12} \frac{d^2}{dx^2})$, obtendo-se a fórmula (2).

Uma etapa seguinte do trabalho foi o estudo da teoria de métodos de passo múltiplo [2, 3] no que se refere a algumas importantes características deste tipo de método, tais como o número de passos, a ordem algébrica, ordem de defasagem de fase, simetria do método, periodicidade e região de estabilidade. Foi verificado que o método clássico de Numerov é classificado como um método de 2 passos de quarta ordem algébrica e de sexta ordem de defasagem de fase, sendo simétrico com intervalo de periodicidade (0,6) e não é incondicionalmente estável, com dependência de tamanho de passo apropriado para sua estabilidade.

Uma etapa seguinte foi tomar a equação de Schrodinger independente do tempo em coordenadas esféricas e decompô-la em três em três novas equações, sendo duas delas dependentes dos ângulos e uma delas dependente apenas do raio, a chamada equação radial de Schrodinger. Um dos principais métodos usados na solução desta equação é o método clássico de Numerov.

Toda equação diferencial igual à equação (1) pode ser substituída pelo seguinte sistema de equações de primeira ordem $z' = f(x, y)$ e $z = \psi'$. Métodos tradicionais para resolver numericamente este sistema de equações, como os de Runge-Kutta, consideram que os valores de $\psi(x)$ e de ψ' são conhecidos. Já em mecânica quântica não relativística, nos problemas de estados descrito pela equação de autovalor de Schrödinger não se conhece o valor da derivada primeira da função de onda e os métodos de Runge-Kutta não podem ser empregados, uma das principais escolhas neste caso é o método clássico de Numerov. O método de Numerov clássico foi aplicado à equação de Schrodinger radial para o oscilador harmônico simples, para o qual se determina o espectro de energia como um problema de autovalor, e as respectivas autofunções $\psi(x)$, ou funções de onda, ilustra o comportamento de uma partícula de massa m em um poço de potencial unidimensional $V(x) = (1/2)m\omega^2x^2$, em um dado intervalo $a < x < b$ e as energias permitidas (E) que descrevem esses estados estacionários satisfazem a equação de autovalor de Schrodinger [1].

$$\psi''(x) = -k^2(x)\psi^2(x) \quad (3)$$

onde $k = \sqrt{2m[E - V(x)]}/\hbar$ e $\hbar \simeq 1,055 \times 10^{34} J.s$ é a constante de Planck reduzida. Valores de autovalores de um oscilador harmônico foram calculados numericamente e comparados com os valores analíticos. A verificação, da correta implementação do algoritmo, foi verificada pelo método de soluções manufaturadas [7] pela estimativa das ordens geométricas e de defasagem de fase.

Referências

- [1] GRIFFITHS, D. J.; SCHROETER, D. F. *Introduction to Quantum Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2018.
- [2] LAMBERT, J. D. *Computational methods in ordinary differential equations*. New York: John Wiley & Sons, 1973.
- [3] LAMBERT, J. D.; WATSON, I. A. Symmetric multistep methods for periodic initial value problems. *IMA Journal of Applied Mathematics*, v. 18, n. 2, p. 189–202, 1976. DOI: <https://doi.org/10.1093/imamat/18.2.189>.
- [4] MEDVEDEVA, M. A.; SIMOS, T. E.; TSITOURAS, Ch. Sixth-order, P-stable, Numerov-type methods for use at moderate accuracies. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, v. 44, n. 8, p. 6923–6930, 2021.
- [5] NOUMEROV, B. V. A method of extrapolation of perturbations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 84, n. 8, p. 592–602, 1924. DOI: <https://doi.org/10.1093/mnras/84.8.592>.
- [6] NOUMEROV, B. V. Note on the numerical integration of $d^2x/dt^2 = f(x, t)$. *Astronomische Nachrichten*, v. 230, n. 19, p. 359–364, 1927. DOI: <https://doi.org/10.1002/asna.19272301903>.
- [7] ROACHE, P. J. Code verification by the method of manufactured solutions. *Journal of Fluids Engineering*, v. 124, n. 1, p. 4–10, 2002.

Decomposição em Valores Singulares e aplicação em Compressão de Imagens

Alessandro Gaio Chimenton

Carlos Andre Burity Silva

Instituto de Ciências Exatas, UFF

R. Des. Ellis Hermydio Figueira, 783

27213-145, Volta Redonda, RJ

E-mail: alessandrogaio@id.uff.br

carlosabs@id.uff.br

RESUMO

Decomposições matriciais aparecem em diversas aplicações em Matemática, Física e Engenharia, como por exemplo na resolução de sistemas lineares de grande porte oriundos de soluções numéricas de equações diferenciais parciais via métodos variacionais. No espectro tecnológico, tais decomposições podem ser usadas para tratar estatisticamente conjuntos grandes de dados multidimensionais e também para filtrá-los. Neste trabalho, estudamos a Decomposição em Valores Singulares (SVD) visando aplicações em computação gráfica. Mais especificamente, uma imagem digital de $m \times n$ pixels pode ser vista como uma matriz $m \times n$ de entradas reais no intervalo $[0, 1]$ (por exemplo na escala de cinza). Utilizando SVD, podemos produzir versões comprimidas da imagem original preservando suas características mais relevantes segundo algum critério preestabelecido. Neste trabalho, desenvolvemos o estudo dos aspectos teóricos subjacentes a essas técnicas e apresentamos alguns estudos de caso.

Referências

- [1] MARTIN, Carla D.; PORTER, Mason A. The extraordinary SVD. *The American Mathematical Monthly*, v. 119, n. 10, p. 838-851, 2012.
- [2] TREFETHEN, Lloyd N.; BAU, David. Numerical linear algebra. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2022.

Estudo do Método de Otsu para segmentação de imagens

Kauan Santos Amaral

Curso de Matemática Bacharelado com Ênfase em Matemática Computacional, UFF
Rua Desembargador Ellis Hermydio Figueira, 783
27213-415, Volta Redonda, RJ
E-mail: ksamaral@id.uff.br

Marina Ribeiro Barros Dias

Departamento de Matemática de Volta Redonda, UFF
Rua Desembargador Ellis Hermydio Figueira, 783
27213-415, Volta Redonda, RJ
E-mail: marinaribeiro@id.uff.br

RESUMO

A visão, no seu sentido mais geral, desempenha papel essencial na vida humana, sendo capaz de distinguir texturas e detalhes com rapidez e eficiência em imagens. Em particular, a imagem pode ser interpretada como uma visão de algo, fixados o tempo e o espaço, o que a torna também indispensável [2]. Com o avanço das ferramentas computacionais, o campo do processamento de imagens também possui inúmeras aplicações científicas, comerciais, industriais e militares, que resultam da interação entre a pesquisa científica fundamental, por um lado, e o desenvolvimento de novas tecnologias de alto padrão, por outro. A segmentação de imagens é uma etapa importante no processamento de uma imagem. De modo geral, tais técnicas são usadas para dividir uma imagem em diferentes regiões, a fim de obter uma melhor interpretação das informações nela contidas. Em outras palavras, pretende-se subdividir a imagem em regiões por meio do agrupamento dos pixels por meio de algum critério estabelecido. Entre os métodos que possuem este objetivo estão os métodos de limiarização. A limiarização busca realizar o agrupamento dos pixels por meio de suas similaridades e pode ser vista como uma operação que envolve testes sobre uma função T da forma $T = T(x, y, p(x, y), f(x, y))$, onde $f(x, y)$ é o tom de cinza do ponto (x, y) e $p(x, y)$ representa alguma propriedade local [2]. A imagem segmentada, $g(x, y)$, é então definida como

$$g(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } f(x, y) > T \\ 0, & \text{se } f(x, y) \leq T \end{cases}.$$

Pixels identificados como 1 (ou qualquer outro tom de cinza conveniente) correspondem aos objetos, enquanto que os pixels identificados como 0 (ou qualquer outro tom de cinza não designado para o objeto) correspondem ao plano de fundo. Quando assume-se T constante, esta técnica é chamada de limiarização. Este trabalho propõe o estudo do método de limiarização proposto por Otsu em [1]. Além do estudo teórico, foi realizada a implementação em C++ do modelo e aplicação em diversas imagens, a fim de exemplificação.

O método de Otsu [1] propõe um método iterativo de análise do histograma da imagem, onde para todo nível de cinza k se divide os pixels em duas classes, C_0 e C_1 , representando o fundo e imagem, respectivamente. À C_0 se atribui os pixels de intensidade entre 1 e k e à C_1 , os de níveis $k + 1$ a 256. A partir desta divisão avalia-se a efetividade de um nível como limiar. Esta análise considera ω_i e μ_i , respectivamente, como a probabilidade de um dado pixel pertencer a classe C_i e a intensidade média da classe C_i . Busca-se, então, maximizar o critério de medida

$$\eta = \frac{\sigma_B^2}{\sigma_T^2},$$

onde $\sigma_B^2 = \omega_0\omega_1(\mu_1 - \mu_0)^2$ é a variância entre classes e σ_T^2 é o desvio padrão do histograma da imagem e, portanto independente de k . Desta independência, maximizar η se equivale a maximizar σ_B^2 .

A fim de aplicar a técnica estudada foi selecionada a imagem apresentada na Figura 1, que é uma imagem digital em 8-bits, tendo portanto tons de cinza no intervalo $[0, 255]$.



(a) Imagem original em escala de cinza.



(b) Imagem binarizada com o uso do pelo método de Otsu ($k = 145$).

Figura 1: Imagem original e imagem gerada após processamento pelo método de Otsu.

A implementação computacional foi desenvolvida em C++ e os valores dos parâmetros obtidos para a realização do método de Otsu na imagem apresentada na Figura 1a foram: $\sigma_B^2 = 1918,14$, $\sigma_T^2 = 2387,25$, $\omega_0 = 0,6$, $\omega_1 = 0,4$, $\mu_0 = 100,83$, $\mu_1 = 190,29$, $k = 145$, $\eta = 0,8$.

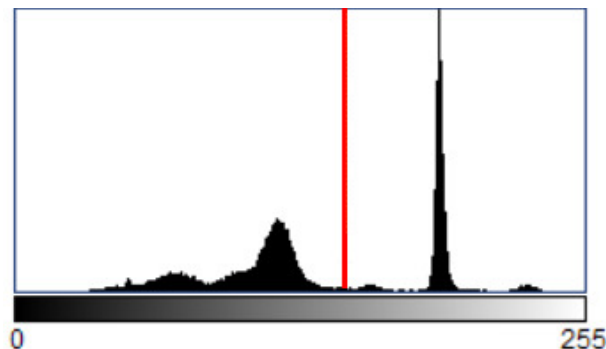


Figura 2: Histograma da imagem original apresentada na Figura 1a. Destaque para o nível de cinza selecionado para a limiarização da imagem.

Observe que o histograma da imagem original é bimodal. De fato, o método de Otsu tende a apresentar melhores resultados em imagens que apresentam este tipo de histograma. Outra vantagem do método é sua simplicidade e velocidade, com baixo custo computacional. Sua maior aplicabilidade está em áreas de detecção e reconhecimento de objetos, segmentação de imagens na área médica, análise de documentos, entre outras. Entre as desvantagens do método, destacam-se algumas limitações: pode não ter um bom desempenho com imagens que tenham histogramas com mais de dois picos, pois só pode determinar um valor limite; assume que as regiões de primeiro e segundo plano têm variâncias iguais, o que pode não ser verdade em alguns casos, levando a resultados de segmentação ruins, pode produzir resultados imprecisos para imagens com iluminação irregular ou iluminação, não é robusto ao ruído, o que pode levar a resultados de limiar imprecisos.

Referências

- [1] OTSU, N. A threshold selection method from gray-level histograms. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-9, p. 62-66, 1979
- [2] GONZALEZ, R. C., WOODS, R. E. *Processamento de Imagens Digitais*. Editora Edgard Blucher, São Paulo, 2000.

Fundamentos Matemáticos da Criptografia Moderna

Jordan Lambert

Leonardo Vinícius*

Instituto de Ciências Exatas, UFF
R. Des. Ellis Hermydio Figueira, 783
27213-145, Volta Redonda, RJ

E-mail: jordanlambert@id.uff.br

leonardocamargo@id.uff.br

RESUMO

A criptografia desempenha um papel essencial na proteção de informações em meios digitais, garantindo a segurança de comunicações, transações financeiras e sistemas computacionais. Tradicionalmente, os sistemas criptográficos utilizavam chaves simétricas, mas a necessidade de maior escalabilidade e segurança levou ao desenvolvimento da criptografia de chave pública, baseada em problemas matemáticos de difícil resolução computacional.

Neste trabalho, apresentamos os fundamentos matemáticos da criptografia moderna, com ênfase em dois problemas centrais: o logaritmo discreto e a fatoração de inteiros. A partir desses problemas, discutimos brevemente os algoritmos Diffie–Hellman, ElGamal e RSA, que constituem a base da segurança digital atual.

Referências

- [1] J. Hoffstein, J.Pipher, and J. Silverman. *An introduction to Mathematical Cryptography*. 2nd edition, Springer, 2014.
- [2] S. C. Coutinho. *Criptografia*. OBMEP, IMPA, 2015.

*Bolsista de Iniciação Científica FAPERJ

Detecção de Textos Gerados pelo ChatGPT com Técnicas de Mineração de Texto e Aprendizado de Máquina

Lívia Pelegrino

Instituto de Matemática e Estatística, UFF
Rua Professor Marcos Waldemar de Freitas
24.210-201, Niterói, RJ
E-mail: liviapelegrino@id.uff.br

RESUMO

O sucesso do ChatGPT [3] e sua capacidade de desenvolver textos, não apenas na língua nativa, mas também em outras línguas, fizeram dele uma ferramenta cotidiana e, sem dúvida, um facilitador para diversas tarefas. Entretanto, sua capacidade de criar artigos de opinião levanta questionamentos relevantes. Um deles, de natureza ética, é o plágio.

Usar o ChatGPT para consultas não é o mesmo que utilizá-lo para a criação de uma obra completa. Como garantir que a autoria de um texto é legítima? Ou, pelo menos, como atribuir um grau de confiabilidade à autoria dos textos e evitar o uso abusivo dessa ferramenta?

O objetivo deste projeto é utilizar técnicas de Mineração de Texto e de Aprendizado de Máquina para criar um programa capaz de distinguir textos criados por humanos de textos criados pelo ChatGPT. Ou, pelo menos, atribuir um grau de confiança à autoria dos textos.

A base de dados utilizada neste trabalho foi disponibilizada por Guo et al. [5] e pode ser encontrada no GitHub do autor. Todas as análises foram realizadas no programa R [9]. A base contém respostas para 24.322 perguntas de diferentes áreas, totalizando 75.608 respostas, sendo 53.599 dadas por humanos e 22.009 pelo ChatGPT. Trata-se, portanto, de uma base não balanceada.

A primeira etapa consistiu em organizar a base e dividi-la em treino (70%) e teste (30%), preservando a proporção de textos feitos por humanos e pelo ChatGPT. A base de treino foi utilizada em todo o processo de ajuste, desde a vetorização dos textos até a estimativa dos parâmetros dos modelos, enquanto a base de teste foi usada apenas para avaliar a qualidade da classificação para dados novos.

As etapas de pré-processamento de texto incluíram: tokenização, remoção de *stopwords*, normalização [7] e seleção de termos [8].

Após o pré-processamento, a Matriz do Termo-Documento (TD) foi construída e a partir dela se fez a vetorização de textos. A matriz TD é uma matriz onde cada posição x_i, j_i guarda a frequência do termo j no documento i . Cada documento é representado pela linha i da matriz TD. Este método de vetorização é chamado de Bag of Words [6, 10].

Os métodos de classificação adotados foram a Floresta Aleatória [2] e o XGBoost [4], ambos retornando previsões no intervalo $[0, 1]$. Quanto mais próximo de 1, maior a probabilidade da classe ChatGPT; quanto mais próximo de 0, maior a probabilidade da classe humanos.

A análise da curva ROC [1] mostrou que os dois métodos tiveram bom desempenho, com AUC próxima de 1 (aproximadamente 0,96). Os valores de corte adotados foram 0,395 para a Floresta Aleatória e 0,308 para o XGBoost. O que significa que as unidades amostrais com previsões na Floresta Aleatória maiores que 0,395 foram classificadas na categoria ChatGPT e para o método XGBoost, as unidades amostrais com previsões maiores que 0,308 foram classificadas como ChatGPT.

O método Floresta Aleatória na base de teste apresentou: acurácia de 0,922, o que indica que a probabilidade do método acertar uma classificação é de 92,2

O método XGBoost na base de teste apresentou: acurácia de 0,906, ou seja, a probabilidade do método acertar uma classificação é 90,6

Dessa forma pode-se concluir que os dois métodos de classificação e a vetorização BoW foram capazes de identificar os textos criados por humanos e pelo ChatGPT com baixas probabilidades de erros. Para consolidar esses resultados é preciso realizar as análises considerando a validação cruzada. Uma continuação deste projeto, a fim de torná-lo aplicável na vida real, é replicar as análises com textos em português e de outras naturezas, como por exemplo, artigos científicos e trabalhos de conclusão de curso.

Referências

- [1] BISHOP, CHRISTOPHER M.; NASRABADI, NASSER M. Pattern recognition and machine learning. *New York: Springer*, 2006.
- [2] BREIMAN, L. Random Forests. *Machine Learning* 45: 5-32, 2001.
- [3] BROWN, TOM, et al. Language models are few-shot learners. *Advances in neural information processing systems* 33: 1877-1901, 2020.
- [4] CHEN, T.; GUESTRIN, C. XGBoost: A Scalable Tree Boosting System. *Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, 785-794, 2016.
- [5] GUO, BIYANG, et al. How Close is ChatGPT to Human Experts? Comparison Corpus, Evaluation, and Detection, 2023.
- [6] HVITFELDT, EMIL; SILGE, JULIA. Supervised machine learning for text analysis in R. *Chapman and Hall/CRC*, 2021.
- [7] KHYANI, DIVYA, et al. An interpretation of lemmatization and stemming in natural language processing. *Journal of University of Shanghai for Science and Technology* 22.10: 350-357, 2021.
- [8] LUHN, HANS PETER. The automatic creation of literature abstracts. *IBM Journal of Research and Development* 2(2): 159-165, 1958.
- [9] R CORE TEAM. R: A language and environment for statistical computing. *R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria*, 2021. Disponível em: <https://www.R-project.org/>.
- [10] SILGE, JULIA. *Text mining with R: A tidy approach*. O'Reilly, 2017.

Estimativa de Parâmetros do Modelo SIR Baseada na Dinâmica da População Infectada por COVID-19

Marina R. B. Dias

Lucas da S. Paiva*

Instituto de Ciências Exatas, UFF

R. Des. Ellis Hermydio Figueira, 783

27213-145, Volta Redonda, RJ

E-mail: marinaribeiro@id.uff.br

lucassilvapaiva@id.uff.br

RESUMO

Os modelos compartimentados denominados SIR [3] foram amplamente utilizados durante a pandemia de COVID-19, em 2020, com objetivo principal de auxiliar as autoridades nas tomadas de decisões. Uma das grandes dificuldades em sua utilização foi a determinação dos parâmetros envolvidos no modelo. Este trabalho propõe o estudo de uma técnica para estimar os parâmetros do modelo SIR que se baseia no trabalho de Schmitt [5], o qual realizou as estimativas de parâmetros a partir da análise do comportamento da população de infectados, levando em consideração dois momentos: a fase inicial da doença (onde há crescimento desta população) e a fase avançada, em que o número de infectados começa a decrescer.

As equações do modelo SIR são dadas pela Eq. (1), onde se considera a população dividida em três subpopulações: suscetíveis, $S(t)$; infectados, $I(t)$; e removidos/recuperados, $R(t)$, ou seja,

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{N} \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \alpha I \\ \frac{dR}{dt} = \alpha I \end{cases}, \quad (1)$$

onde $\beta > 0$ é a taxa de contágio e $\alpha > 0$ é a taxa de recuperação. $S(t_0) = S_0$ e $I(t_0) = I_0$ representam as populações de suscetíveis e infectados no instante inicial $t_0 \in \mathbb{R}^+$, respectivamente. A população inicial de removidos é adotada como sendo zero ($R(t_0) = 0$) e a taxa de reprodutibilidade basal é dada por $R_0 = \frac{\beta}{\alpha}$. N representa o número total de indivíduos e assume-se que a soma de cada população é estável, ou seja, $S + I + R = N$. Segundo [5], os parâmetros foram estimados considerando-se:

i) Inicialmente ($N \gg I_0$), $I_c(t)$ cresce até um valor máximo I_{max} . Pode-se determinar $I_c(t) = I_0 e^{\gamma t}$, sendo $\gamma = \beta - \alpha$, e o valor máximo será dado por $I_{max} = \frac{N}{R_0}(R_0 - 1 - \log R_0)$.

ii) No fim da epidemia, cada população atinge um valor limite, S_e , I_e e R_e . Supondo que a doença foi extinta, isto é, $I_e = 0$, a seguinte relação é válida: $S_e = \frac{N}{R_0} \log\left(\frac{S_e}{N}\right) + 1$.

iii) Como $S + I + R = N$, quando $I_e = 0$, tem-se $\frac{R_e}{N} + \frac{S_e}{N} = 1$ e, portanto, $\frac{R_e}{N} = -\frac{1}{R_0} \log\left(\frac{S_e}{N}\right)$.

iv) A expressão analítica que modela o decréscimo de $I(t)$ é dada por $I_d(t) = C e^{-\Gamma(t-t_0)}$, com $\Gamma = -\frac{\beta S_e}{N} + \alpha$ e $C \in \mathbb{R}^+$.

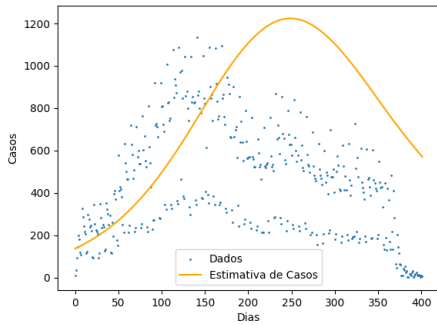
v) Os parâmetros, portanto, podem ser estimados por meio de $\tau = \frac{\gamma}{\Gamma} = \frac{R_0 - 1}{1 - R_0 \frac{S_e}{N}}$, $\beta = \frac{\gamma}{1 - \frac{1}{R_0}}$ e das relações anteriores.

As funções $I_c(t)$ e $I_d(t)$ são encontradas usando uma escala logarítmica e mediante ajuste linear encontramos γ e Γ . Quanto a $\frac{S_\infty}{N}$, é necessário definir $f(R_0) = \tau_e - \tau(R_0)$ e $\tau(R_0) = \frac{R_0 - 1}{1 - R_0 \frac{S_\infty}{N}}$, com τ_e sendo o valor de τ encontrado através do ajuste de $I_c(t)$ e $I_d(t)$. Assim pode-se calcular numericamente $\frac{S_\infty}{N}$ usando o método de Newton-Raphson [1] e minimizar $f(R_0)$, encontrando R_0 . Já o valor de I_{max} pode ser encontrado analisando o conjunto de dados.

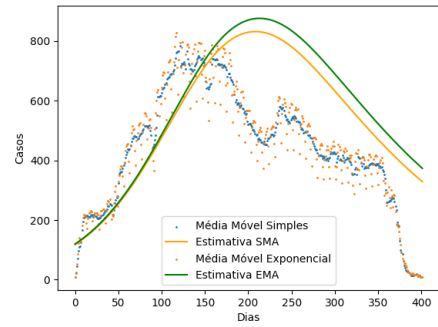
Para esse trabalho foram utilizados dados obtidos em [4], no período de dez/23 a fev/25, e são referentes aos casos de síndrome respiratória aguda grave (SRAG). O código-fonte foi elaborado pelos autores e está disponível como software de código aberto sob licença MIT no GitHub (<https://github.com/Lucas076993/SIR-Parameters-Estimation>). Para a simulação do modelo foi utilizado o método de Runge-Kutta de quarta ordem [1].

Foram estimados os valores presentes na Tab. 1. Quanto ao erro quadrático médio (MSE), os valores calculados estão na Tab. 2. O resultado da simulação pode ser visto na Fig. 1a.

*Bolsista de Iniciação Científica FAPERJ



(a) Simulação de $I(t)$. Fonte: Autores.



(b) Simulação das médias móveis. Fonte: Autores.

Figura 1: Simulação do modelo SIR, dados reais, médias móveis e resultados numéricos obtidos.

Tabela 1: Parâmetros encontrados em relação ao número de casos. Fonte: Autores.

Parâmetro	Valor estimado (Casos)	Valor estimado (SMA)	Valor estimado (EMA)
N	17.490,72	3.348,89	3.320,62
β	$4,2e^{-2}$	$2,8e^{-2}$	$2,7e^{-2}$
α	$2,8e^{-2}$	$1,1e^{-2}$	$1,0e^{-2}$
I_0	136,75	117,38	119,46
I_{\max}	1134	783,57	828,78

Entretanto, nota-se que os dados coletados apresentam muita flutuação, o que pode ter contribuído negativamente para o cálculo de N . Como alternativa, empregou-se a média móvel como suavizador, visando reduzir ruídos e sazonalidade nas notificações. Adotaram-se duas abordagens: a média móvel simples (SMA) com janela de 7 dias para análises de longo prazo, e a média móvel exponencial (EMA) com maior peso nos últimos 7 dias para análises mais dinâmicas [2].

Tabela 2: Erro Quadrático Médio

MSE	Casos	SMA	EMA
$I_c(t)$	0,92	1,34	1,23
$I_d(t)$	9,85	5,99	5,72
Simulação	259.063,92	39.008,29	55.125,78

Os resultados obtidos com as médias móveis podem ser vistos na Fig. 1b e na Tab. 1. Num cômputo geral, os resultados indicam a tendência do crescimento e decrescimento do número de infectados e das médias móveis ao longo do período avaliado. Quantitativamente, as estimativas relativas as médias móveis apresentaram resultados melhores do que a estimativa sobre o número de casos, com erros quadráticos menores. Quantitativamente, a abordagem com as médias móveis tem resultado similar ao apresentado pela estimativa sobre o número de casos. Além disso, não houve diferença qualitativa quanto ao tipo de média móvel empregado. A abordagem com SMA demonstrou resultados qualitativos superiores a abordagem com EMA, visto que ambas obtiveram resultados muito próximos para os parâmetros e a SMA teve erro quadrático menor durante as simulações (diferença de 16.117,49).

Agradecimentos

À Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo a Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ) pelo financiamento (processo E-26/201.241/2024) e ao Instituto de Ciências Exatas, pela estrutura.

Referências

- [1] M. C. C. Cunha. **Métodos Numéricos**. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2000. ISBN: 8526805215.
- [2] Rob J. Hyndman e George Athanasopoulos. “Moving averages”. Em: **Forecasting: Principles and Practice (3rd ed)**. Acessado em 06/08/2025. OTexts, 2021. Cap. 3.3. URL: <https://otexts.com/fpp3/moving-averages.html>.
- [3] W. O. Kermack e A. G. McKendrick. “A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics”. Em: **Proc. of the Royal Society of London A**. Vol. 115. 1927, pp. 700–721. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118>.

- [4] BRASIL. MINISTÉRIO DA SAÚDE. **openDataSUS - SRAG 2021 a 2024 - Banco de Dados de Síndrome Respiratória Aguda Grave - incluindo dados da COVID-19**. Online. Acessado em 06/03/2025, <https://opendatasus.saude.gov.br/dataset/srag-2021-a-2024>.
- [5] F.G. Schmitt. "An algorithm for the direct estimation of the parameters of the SIR epidemic model from the I(t) dynamics." Em: **Eur. Phys. J. Plus** 137 (2022), p. 57. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-021-02237-7>.

Uma Abordagem Matemática para a Dinâmica da Contração Muscular no Modelo de Hill de Três Elementos

Lucas C. Teixeira

Departamento de Física - ICEx - UFF
Volta Redonda, RJ
E-mail: cordeiro_lucas@id.uff.br

Wellington C. Jesus

Departamento de Matemática - ICEx - UFF
Volta Redonda, RJ
E-mail: wellingtonjesus@id.uff.br

Marina R. B. Dias

Departamento de Matemática - ICEx - UFF
Volta Redonda, RJ
E-mail: marinaribeiro@id.uff.br

RESUMO

A utilização de modelos simples do tipo Hill em simulações computacionais, ao invés de modelos mais complexos e recentes, é amplamente justificada, considerando que modelos com menor custo computacional, mesmo sendo menos precisos, possuem grande relevância para simulações de larga escala [3]. Este trabalho representa uma continuação e expansão da plataforma MUSCLES, uma ferramenta computacional online desenvolvida para o estudo da fisiologia muscular básica [2]. Especificamente, é investigado um modelo de Hill com 3 elementos, fundamentado no princípio de que o tecido muscular gera dois tipos distintos de força: ativa e passiva, que se combinam para formar a força total resultante.

Os elementos não contráteis do músculo contribuem através de sua força passiva. Do ponto de vista técnico, o elemento passivo muscular apresenta características mais adequadamente descritas como elásticas, porém pode ser representado de forma simplificada através de um modelo de mola. Considerando que este elemento similar a uma mola está conectado em série com o elemento contrátil, é possível interpretar a força gerada pelo elemento contrátil como uma força ativa que é transmitida ao tecido muscular através de um elemento elástico disposto em série. Os músculos, entretanto, possuem também um segundo elemento elástico, denominado elemento elástico paralelo, que igualmente contribui para a força passiva gerada.

Em 1922, A. V. Hill [1] observou inicialmente que músculos em estado ativado geram maior força quando mantidos de forma isométrica (isto é, com comprimento constante) comparativamente a quando sofrem encurtamento. Durante o processo de encurtamento muscular, observa-se que parte da força ativa é aparentemente dissipada para vencer uma resistência intrínseca. Esta resistência não poderia ser atribuída ao elemento elástico em série, uma vez que este resiste ao alongamento e não ao encurtamento. Hill constatou que quanto maior a velocidade de encurtamento muscular, menor é a força total produzida. Considerando uma força ativa constante, Hill concluiu que velocidades de encurtamento mais elevadas resultam em forças resistivas maiores. Hill estabeleceu uma analogia entre esta força resistiva e a de um pistão movendo-se em um fluido viscoso, similar ao funcionamento de um amortecedor.

A viscosidade muscular, juntamente com os elementos elásticos paralelo e em série, constituem os componentes passivos de um modelo muscular elementar. O comprimento do elemento elástico em série é representado por x_1 , enquanto o comprimento do elemento elástico paralelo é designado por x_2 . Este modelo permite descrever como a força total gerada pelo músculo depende tanto de seus componentes passivos quanto ativos. Assumindo que o elemento elástico em série possua um comprimento de repouso \bar{x}_1 e que o elemento elástico paralelo tenha um comprimento de repouso \bar{x}_2 , observa-se que a mesma força T atua em ambos os elementos, dado que o músculo pode desenvolver apenas uma força em cada instante.

Desta forma, temos:

$$\dot{T} = \frac{K_{SE}}{b} \left[K_{PE}(x - \bar{x}) + b\dot{x} - \left(1 + \frac{K_{PE}}{K_{SE}} \right) T + A \right] \quad (1)$$

Referências

- [1] HILL, A. V. *First and last experiments in muscle mechanics*. Cambridge University Press, 1970.
- [2] TEIXEIRA, L. C.; JESUS, W. C.; DIAS, M. R. B.; LUSTOSA, S. A. S. Uma estrutura interativa para o ensino do modelo de contração muscular de Hill. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 11, n. 1, p. 1-2, 2025.
- [3] YEO, S.; VERHEUL, J.; HERZOG, W.; SUEDA, S. Numerical instability of Hill-type muscle models. *Journal of The Royal Society Interface*, v. 20, n. 199, p. 20220430, 2023.

Diâmetro de alguns produtos de grafos via matriz distância

Luiz Fernando de Oliveira Valva*

Francisca Andrea Macedo França

ICEX - Instituto de Ciências Exatas - UFF

R. Des. Ellis Hermydio Figueira, 783 - Atarrado

27213-415, Volta Redonda, RJ

E-mail: lfovalva@id.uff.br

francisca_franca@id.uff.br

Seja $G = (V, E)$ um grafo não orientado conexo com conjunto de vértices V e conjunto de arestas E . A ordem de G é a cardinalidade de V e o tamanho de G é a cardinalidade de E . Dado $v \in V$, a vizinhança de v é o conjunto $N_G(v) = \{u \in V; \{u, v\} \in E\}$ e $|N_G(v)| = d(v)$ é o grau de v . A distância $d(v_i, v_j)$ entre os vértices v_i e v_j de G é igual ao comprimento (número de arestas em G) do menor caminho que conecta v_i e v_j . A *excentricidade* de um vértice v , denotada por $\text{exc}(v)$, é o maior valor entre as distâncias de v a qualquer outro vértice de G , ou seja, $\text{exc}(v) = \max\{d(v, u) : u \in V\}$. O *diâmetro* de G , denotado por $D(G)$, é a maior distância entre quaisquer dois vértices do grafo, isto é,

$$\text{Diam}(G) = \max\{\text{exc}(v) : v \in V\}.$$

A *matriz distância do grafo* G , denotada por $D(G) = (D_{i,j})$, é uma matriz quadrada de ordem n cujas as entradas são definidas por $D_{i,j} = d(v_i, v_j)$.

É comum alterar a estrutura de um grafo para obter um novo grafo, o que se mostra uma ferramenta muito útil para estudar determinados tópicos em Teoria de Grafos. As operações em grafos geram novos grafos usando informações dos grafos originais. Para maiores detalhes sobre operações em grafos sugerimos (1; 3) e suas referências. Algumas operações de grafos como: produto direto e produto lexicográfico foram introduzidas na literatura e suas propriedades espectrais tem sido estudadas, ver (2) e suas referências. Seguindo esta linha, neste trabalho apresentamos alguns resultados obtidos durante o estudo da *matriz distância* e as propriedades estruturais dos grafos, com ênfase no produto cartesiano e no produto forte de grafos.

O *produto cartesiano* de G_1 e G_2 , denotado por $G_1 \square G_2$, é o grafo em que $(u_i, v_j) \sim (u_r, v_s)$ se, e somente se, $(u_i = u_r \text{ e } v_j \sim v_s \text{ em } G_2)$ ou $(u_i \sim u_r \text{ e } v_j = v_s)$. O *produto forte* de G_1 e G_2 , denotado por $G_1 \boxtimes G_2$, é o grafo em que $(u_i, v_j) \sim (u_r, v_s)$ se: $(u_i = u_r \text{ e } v_j \sim v_s)$ ou $(u_i \sim u_r \text{ e } v_j = v_s)$ ou $(u_i \sim u_r \text{ e } v_j \sim v_s)$. Exemplificamos a seguir para $G_1 = P_2$ e $G_2 = P_3$ para tais operações.

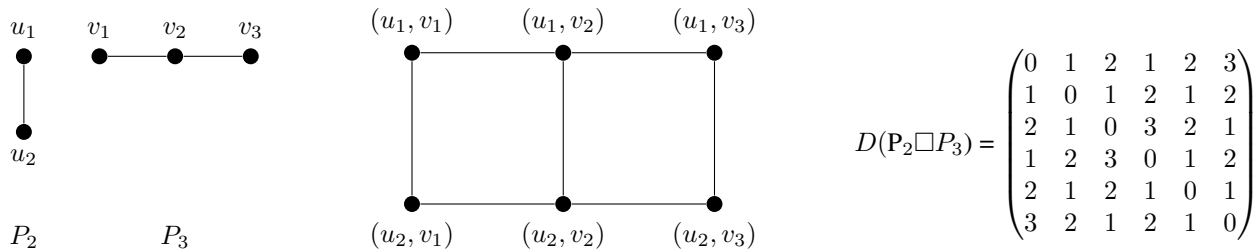


Figura 1: Matriz distância do grafo $P_2 \square P_3$

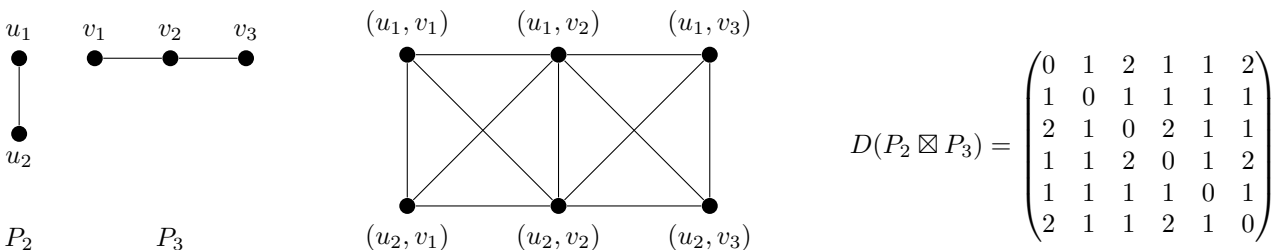


Figura 2: Matriz distância do grafo $P_2 \boxtimes P_3$

*Bolsista de Iniciação Científica PIBIC/CNPq

Os resultados a seguir foram deduzidos através de testes computacionais via *Newgraph* analisando a matriz distância dos grafos após a aplicação das operações citadas.

Lema 1. *Sejam P_n e P_m grafos caminho com $n, m \geq 1$. Então, a matriz distância do grafo $P_n \square P_m$ é simétrica.*

Proposição 1. *Seja $P_2 \square P_m$ o produto cartesiano de dois grafos caminho P_2 e P_m , com $m \geq 1$. Então, o diâmetro do grafo $P_2 \square P_m$ é dado por*

$$\text{Diam}(P_2 \square P_m) = m.$$

A partir da construção das matrizes de distâncias para os grafos $P_2 \boxtimes P_m$, com $m \geq 2$, foi possível observar um padrão regular quanto ao valor do diâmetro. Os valores obtidos seguem a sequência $1, 2, 3, 4, \dots$, o que levou à formulação da seguinte proposição:

Proposição 2. *Seja $m \geq 2$ um inteiro. Então, o diâmetro do grafo produto forte $P_2 \boxtimes P_m$ é dado por*

$$\text{Diam}(P_2 \boxtimes P_m) = m - 1.$$

Agradecimentos

O primeiro autor, vinculado ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC/UFF 2024-2025), agradece o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, código: IC240945.

Referências

- [1] AOUCHICHE, M.; HANSEN, P. Distance spectra of graphs: A survey, *Linear Algebra and its Applications*, v. 458, p. 301-386, 2014.
- [2] BARIK, S.; KALITA, D.; PATI, S.; SAHOO, G. Spectra of Graphs Resulting from Various Graph Operations and Products: a Survey. *Special Matrices*, n.1, v.6, p.323-342, 2018.
- [3] MIHAILOVIĆ, B.; RASAJSKI, M. ; STANIĆ, Z. Reflexive cacti: a survey, *Analysis and Discrete Mathematics*, v.10, p.552-568, 2016.

Introdução à Teoria Espectral de Grafos

Nathália Aparecida Cleto Burns

Instituto de Ciências Exatas, UFF
Rua Desembargador Ellis Hermydio Figueira, 783
27213-145, Volta Redonda, RJ
E-mail: nathaliaburns@id.uff.br

Carlos Henrique Pereira do Nascimento

Instituto de Ciências Exatas, UFF
Rua Desembargador Ellis Hermydio Figueira, 783
27213-145, Volta Redonda, RJ
E-mail: carloshenrique@id.uff.br

RESUMO

A Teoria dos Grafos surgiu no século XVIII, há cerca de 250 anos, quando Leonhard Euler resolveu o célebre problema das Sete Pontes de Königsberg, que consistia em descobrir se seria possível atravessar todas as pontes da cidade sem repetir nenhuma delas. E o que parecia um desafio simples, acabou revelando conceitos matemáticos profundos e deu início a um campo que se tornou na Matemática e na Computação, com aplicações que vão muito além da mera representação de conexões.

Entre suas principais ferramentas destacam-se as matrizes que representam os grafos de maneira precisa e estruturada. A Matriz de Adjacência codifica as relações diretas entre os vértices, indicando a presença ou ausência de arestas e permitindo identificar conexões imediatas e vizinhanças de cada vértice. Já, a Matriz Laplaciana reflete a estrutura global do grafo, combinando informações sobre graus de vértices e conectividade, sendo fundamental na análise de fluxo, caminhos, componentes conectados e em estudos espectrais que revelam propriedades profundas da rede.

Neste trabalho, são apresentados conceitos e resultados básicos sobre essas duas matrizes, com o objetivo de estabelecer uma base sólida para investigações futuras e aplicações mais avançadas em Teoria de Grafos.

Referências

- [1] ABREU, Nair M. M. and Del-Vecchio, Renata R. and Vinagre, Cybele T. M. and Stevanovic, Dragan. *Introdução à Teoria Espectral de Grafos com Aplicações*. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional – SBMAC. (Notas em Matemática Aplicada; v. 27) - 2ª edição, 2012.
- [2] NETTO, Paulo Oswaldo Boaventura *Grafos: teoria, modelos, algoritmos*. 4. ed. Editora Blücher. São Paulo, 2006.
- [3] NUNES, Rafaella Ferreira. *Teoria Espectral de Grafos - Uma breve introdução*. Monografia (Bacharelado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2021.

Impacto das características da doença na sobrevivência das pacientes com câncer de mama

Pedro Frazão Dutra*

Núbia Karla de Oliveira Almeida

Instituto de Matemática e Estatística, UFF
Rua Professor Marcos Waldemar de Freitas, s/n
24.210-201, Niterói, RJ
E-mail: pefrazao@id.uff.br nubia_karla@id.uff.br

RESUMO

A técnica de Análise de Sobrevivência é utilizada em estudos diversos da área da saúde onde há interesse de se investigar fatores referentes a características dos pacientes, da doença e do tratamento que contribuem para a maior sobrevida dos enfermos.

No estudo a ser apresentado, investiga-se como os atributos estadiamento clínico, ocorrência de múltiplos tumores e lateralidade do tumor influenciam o tempo de sobrevida de mulheres no seu 1^o tratamento contra o câncer de mama. Os dados utilizados são referentes a mulheres que iniciaram seu tratamento entre 2010 e 2019, e cujas informações estão disponíveis publicamente e de forma anônima pelo Instituto Nacional do Câncer (Integrador RHC).

A análise dos dados contempla uma avaliação descritiva e a técnica de Kaplan-Meier com testes log-rank[1, 2] de comparação de funções de sobrevivência por estratos, que são uma abordagem não-paramétrica de Análise de Sobrevivência. Todas as inferências estatísticas basearam-se no nível de significância de 5%. Resultados preliminares indicam que os atributos investigados geram influência sobre o tempo de sobrevida das pacientes.

Referências

- [1] COLOSIMO, E. A.; GIOLO, S. R. *Análise de sobrevivência aplicada*. São Paulo: Blucher, 2006.
- [2] KALBFLEISCH, J. D.; PRENTICE, R. L. *The statistical Analysis of Failure Time Data*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2002.

*Bolsista de Iniciação Científica FAPERJ

Introdução à Dinâmica Simbólica

Miguel Adriano Koiller Schnoor

Raphael Modesto Malvão

Instituto de Ciências Exatas, UFF

R. Des. Ellis Hermydio Figueira, 783

27213-145, Volta Redonda, RJ

E-mail: mschnoor@id.uff.br

rmodesto@id.uff.br

Alessandro Gaio Chimenton

Instituto de Ciências Exatas, UFF

R. Des. Ellis Hermydio Figueira, 783

27213-145, Volta Redonda, RJ

E-mail: alessandrogaio@id.uff.br

RESUMO

Dado um conjunto X com alguma estrutura (norma, métrica, topologia, ...) e uma função $f : X \rightarrow X$, definimos a *órbita* de $p \in X$ por

$$\mathcal{O}^+(p) = \{f^n(p) : n \in \mathbb{N}\},$$

em que $f^n(p)$ denota o n -ésimo iterado de p pela função f , ou seja,

$$f^n(p) = \underbrace{(f \circ f \circ f \circ \dots \circ f)}_{n \text{ vezes}}(p).$$

A área de Sistemas Dinâmicos é dedicada ao estudo do comportamento de tais órbitas. Por exemplo, podemos perguntar se uma órbita é periódica ou se ela é densa em X ou até mesmo se existem órbitas com essas propriedades.

Um sistema dinâmico de extrema relevância para a área é o "shift" $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$, em que $\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ denota o conjunto das sequências de dois símbolos e σ é a função que desloca cada elemento da sequência uma posição para a esquerda, "esquecendo" o primeiro elemento da sequência, ou seja,

$$\sigma((x_j)_{j \in \mathbb{N}}) = (x_{j+1})_{j \in \mathbb{N}}.$$

Por exemplo, seja $x \in \Sigma_2$ dado por

$$x = 0100011011\dots,$$

ao aplicarmos a função σ em x , teremos uma nova sequência

$$\sigma(x) = 1000110110\dots$$

Se continuarmos aplicando σ repetidas vezes, teremos

$$\sigma^2(x) = 0001101100\dots$$

$$\sigma^3(x) = 0011011000\dots$$

⋮

$$\sigma^j(x) = x_{j+1}x_{j+2}\dots$$

Essa dinâmica possui diversas propriedades interessantes. Por exemplo, ela é transitiva (possui uma órbita densa) e o conjunto dos pontos periódicos é denso em Σ_2 .

Neste trabalho, será apresentada uma introdução à Dinâmica Simbólica. Explorando conceitos fundamentais, como órbitas de sistemas dinâmicos, pontos periódicos, transitividade e as propriedades do "shift".

Referências

- [1] OCHOA, ALEJANDRO. *Symbolic Dynamics Lecture Notes*, MIT OpenCourseWare 2005.
- [2] ANATOLE KATOK, BORIS HASSELBLATT. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. *Cambridge University Press*, Revised ed. 2010.
- [3] MICHAEL BRIN, GARRETT STUCK. *Introduction to Dynamical Systems*. *Cambridge University Press*, 2015.
- [4] RICHARD A. HOLMGREN. *A First Course in Discrete Dynamical Systems*. *Springer*, 2nd, p. 87-118, 1996.
- [5] ROBERT L. DEVANEY. *An introduction to chaotic dynamical systems*. *Perseus Books*, v.2, p. 39-43, 2003.

Modelos Dinâmicos Bayesianos Generalizados de Defasagem Polinomial

Richard Amarante Melo*

Rafael Santos Erbisti

Instituto de Matemática e Estatística, UFF

Rua Prof. Marcos Waldemar de Freitas Reis, S/N – Bloco H, Campus do Gragoatá

24210-201, Niterói, RJ

E-mail: richardmelo@id.uff.br

rerbisti@id.uff.br

RESUMO

Modelos de defasagem distribuída com restrição polinomial [1] têm sido amplamente utilizados em vários campos, como finanças, economia, meio ambiente e engenharia. Em estudos ambientais, esses modelos são frequentemente aplicados para avaliar o impacto das concentrações de poluentes atmosféricos e variáveis meteorológicas em despechos relacionados à área da saúde [3]. Esse tipo de modelo permite a interpretação de impactos imediatos e defasados da influência do regressor sobre o despecho, o que é particularmente útil para caracterizar o impacto total de efeitos persistentes ao longo do tempo.

De forma geral, a especificação correta de um modelo é essencial para identificar corretamente esses efeitos, especialmente em casos em que tipos sutis e não lineares de dependência temporal precisam ser identificados. No contexto bayesiano, tipicamente, utilizam-se métodos de aproximação, como Monte Carlo via Cadeias de Markov, para se obter aproximação da distribuição a posteriori conjunta das quantidades desconhecidas em modelos dinâmicos para despechos que não seguem distribuição normal. No entanto, esses procedimentos podem ser proibitivos em termos computacionais, dependendo do tamanho dos dados e do número de parâmetros. Por outro lado, procedimentos de inferência sequencial, baseados em geometria da informação [2], podem ser usados para proporcionar defasagens polinomiais em qualquer distribuição pertencente à família exponencial. Esses métodos são computacionalmente eficientes e permitem a estimação instantânea dos parâmetros.

Neste trabalho, foram utilizados modelos dinâmicos generalizados [4] para dados de contagem com inferência realizada em tempo real, incorporando defasagens polinomiais e permitindo que os efeitos sejam estimados de maneira adequada. Esses modelos foram aplicados aos dados de internações por doenças respiratórias nas nove capitais da Amazônia Legal, no período de 2015 a 2024, relacionando o despecho com níveis de poluentes e variáveis climáticas. Percebe-se que os impactos dos poluentes sobre as internações são diferentes em cada capital. Além disso, os efeitos variam ao longo do tempo.

Referências

- [1] ALMON, S. The distributed lag between capital appropriations and expenditures. *Econometrica*, v. 33, n. 1, p. 178-196, 1965.
- [2] ALVES, M. B., MIGON, H. S., MAROTTA, R., JÚNIOR, S. V. S. k-parametric dynamic generalized linear models: a sequential approach via information geometry. Preprint, 2023.
- [3] SCHWARTZ, J. The distributed lag between air pollution and daily deaths. *Epidemiology*, v. 11, n. 3, p. 320-326, 2000.
- [4] WEST, M. and HARRISON, J. *Bayesian Forecasting and Dynamic Models*. 2nd ed. New York: Springer, 1997.

*Bolsista de Iniciação Científica FAPERJ.

Estudo de Métodos de Agrupamento Hierárquico com Aplicação no Conjunto de Dados Iris

Marina Sequeiros Dias de Freitas

Sabrina Vizeu Marques de Oliveira

Departamento de Matemática, UFF

Instituto de Ciências Exatas

R. Des. Ellis Hermydio Figueira, 783

27213-145, Volta Redonda, RJ

E-mail: msdias@id.uff.br

sabrinavizeu@id.uff.br

RESUMO

Em cenários em que obter dados rotulados é custoso, demorado ou até mesmo impossível, a análise de agrupamentos surge como uma técnica fundamental em mineração de dados e aprendizado de máquina. Seu objetivo principal é organizar um conjunto de objetos em grupos, ou *clusters*, com base na similaridade, de forma que os objetos no mesmo *cluster* sejam mais semelhantes entre si do que com os de outros *clusters*. Essa abordagem exploratória é crucial para a descoberta de padrões e estruturas em conjuntos de dados, tornando-se uma ferramenta poderosa em diversas áreas do conhecimento [1].

Neste trabalho, focamos na abordagem de agrupamento, ou *clustering*, hierárquico, um método que constrói uma hierarquia de agrupamentos de forma aninhada. Considerado um método exploratório primitivo, pois não exige suposições prévias sobre a quantidade de grupos, o processo pode ser aglomerativo, iniciando com cada objeto em seu próprio *cluster* e fundindo-os sucessivamente; ou divisivo, começando com todos os objetos em um único *cluster* e realizando divisões sequenciais [2]. O resultado é visualizado através de um dendrograma, uma estrutura em árvore que ilustra a ordem e a distância das fusões. A interpretação do dendrograma é fundamental: o eixo vertical representa a distância ou dissimilaridade, e a altura em que dois ramos se unem indica o quão distantes os respectivos grupos eram ao serem fundidos. O eixo horizontal exibe as amostras individuais. A principal utilidade do dendrograma é auxiliar na escolha do número de *clusters*, o que pode ser feito ao traçar uma linha de corte horizontal; o número de linhas verticais que o corte intercepta corresponde ao número de agrupamentos formados naquela altura. Para quantificar a dissimilaridade entre os objetos, adotamos a distância Euclidiana, calculada a partir de uma matriz de distância inicial. As análises e visualizações foram conduzidas na linguagem Python, focando na aplicação dos métodos sobre um conjunto de dados gerado sinteticamente, o que permite uma demonstração clara do processo.

A distinção central entre as estratégias de agrupamento hierárquico reside nos critérios de ligação (*linkage*) utilizados para medir a distância entre os *clusters* durante o processo de fusão. Neste estudo, exploramos quatro métodos principais: *single linkage*, *complete linkage*, *average linkage* e método de *Ward*. O *single linkage* (ligação simples) define a distância entre dois *clusters* como a distância mínima entre seus pontos. Em contraste, o *complete linkage* (ligação completa) utiliza a distância máxima entre seus membros mais distantes. O *average linkage* (ligação média) calcula a distância média entre todos os pares de pontos. Por fim, o método de *Ward* adota uma abordagem que visa minimizar a perda de informação, fundindo os *clusters* que resultam no menor aumento da soma de erros quadráticos (SEQ), buscando assim produzir agrupamentos mais compactos [3].

Para ilustrar a aplicação prática e demonstrar as etapas do processo de forma controlada, optou-se por utilizar um conjunto de dados sintético, gerado computacionalmente. Por meio da função `make_blobs` da biblioteca Scikit-learn, foi criado um conjunto com 16 amostras (`n_samples=16`) e 2 características (`n_features=2`), distribuídas em 3 *clusters* distintos e bem definidos (`centers=3`). A vantagem desta abordagem é a clareza visual que um número reduzido de pontos oferece, permitindo acompanhar de forma didática todo o fluxo do agrupamento hierárquico, como ilustra a Figura 1.

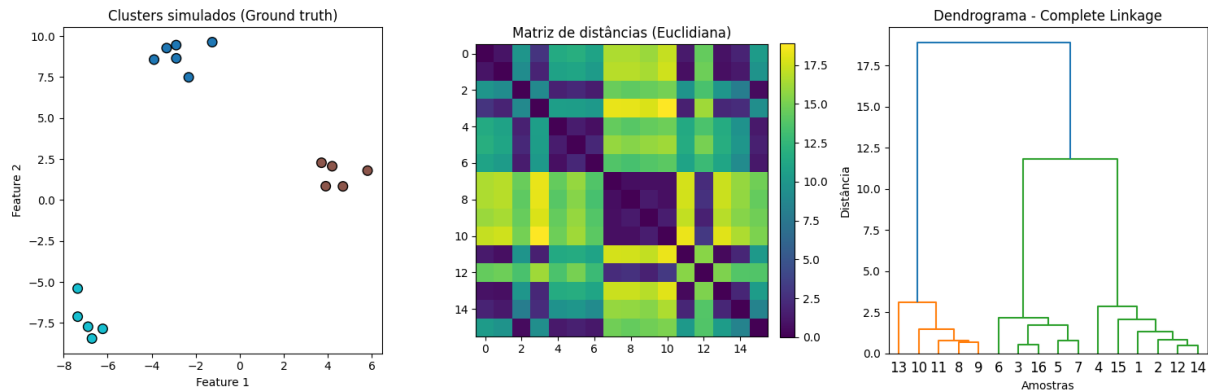


Figura 1: Etapas do processo de agrupamento hierárquico com dados simulados: (a) visualização dos *clusters* (*ground truth*); (b) matriz de distâncias euclidianas; (c) dendrograma resultante pelo método de *complete linkage*.

A análise da Figura 1 revela a eficácia do método na identificação da estrutura dos dados. O painel (a) estabelece a nossa "verdade base" (*ground truth*), exibindo três grupos de dados claramente segregados. Essa separação espacial é quantificada na matriz de distâncias (b), onde os blocos de cores escuras na diagonal principal representam a alta similaridade (baixa distância) entre os pontos de um mesmo grupo, enquanto as cores claras indicam a baixa similaridade entre pontos de grupos distintos. O dendrograma resultante (c), gerado pelo método *complete linkage*, interpreta com sucesso essa estrutura: as fusões a baixas distâncias (ramos inferiores da árvore) unem os pontos dentro de seus respectivos *clusters*. Conforme a interpretação do eixo vertical, as fusões a distâncias significativamente mais altas (os ramos principais superiores) separam precisamente os três grupos originais. A utilidade desta visualização é demonstrar que, mesmo sem o conhecimento prévio dos rótulos, o algoritmo hierárquico foi capaz de reconstruir a estrutura latente dos dados, permitindo uma análise aprofundada da coesão e separação dos grupos.

A partir da clareza obtida com o exemplo didático, o trabalho a ser apresentado estenderá essa análise para um cenário prático de avaliação de algoritmos, utilizando o clássico conjunto de dados Iris, de Fisher. O objetivo será avaliar e comparar rigorosamente a performance dos métodos de ligação *single*, *complete*, *average* e o método de *Ward*. A finalidade desta aplicação é utilizar as classes de espécies já conhecidas (*Setosa*, *Versicolor* e *Virginica*) como uma "verdade base" (*ground truth*) para validar os resultados. A análise buscará responder como cada método lida com as características intrínsecas dos dados, especialmente a conhecida separação da espécie *Setosa* em contraste com a maior sobreposição entre as espécies *Versicolor* e *Virginica*. Dessa forma, será possível determinar qual critério de ligação reconstrói com maior fidelidade os agrupamentos biológicos reais, oferecendo um estudo de caso aprofundado sobre a sensibilidade dos métodos de agrupamento hierárquico.

Este trabalho busca, portanto, apresentar de forma coesa os conceitos do agrupamento hierárquico, ilustrando-os com um exemplo didático e indicando sua aplicação em um estudo de caso clássico.

Referências

- [1] JAMES, G.; WITTEN, D. HASTIE, T.; TIBSHIRANI, R. **An Introduction to Statistical Learning: with Applications in R**. New York: Springer, 2013.
- [2] HASTIE, T.; TIBSHIRANI, R. ; FRIEDMAN, J. **The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction**. Springer, 2009.
- [3] ARAÚJO, M. V. A. **Métodos de Clustering em Aprendizado de Máquinas Não Supervisionado**. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Estatística) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2021.

Modelagem e solução do *school timetabling* de uma escola pública estadual do Rio de Janeiro

Victor Augusto do Carmo Duarte

Erito Marques de Souza Filho

Ronaldo Malheiros Gregório

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, UFRRJ

Av. Governador Roberto Silveira, s/n^o

26285-060, Nova Iguaçu, RJ

E-mail: victoracd2002@ufrj.br

proferitomarques@gmail.com

rgregor@ufrj.br

RESUMO

As tarefas associadas à construção de grades de horários em escolas, frequentemente realizadas manualmente, consomem tempo e recursos de suas equipes de gestão. Há décadas, alternativas computacionais para o enfrentamento a essa questão se fazem presentes na literatura e são implantadas em instituições de ensino públicas e privadas [1]. Nesse sentido, este trabalho se propõe a apresentar a modelagem do *School Timetabling Problem* como um problema de Programação Linear Binária (PLB) e sua solução computacional com uma abordagem envolvendo métodos exatos de otimização e um algoritmo genético. O modelo foi desenvolvido a partir do estudo de caso de uma escola pública estadual do Rio de Janeiro, doravante CEEAL, e sua solução é customizada para a unidade. O software implementado é flexível e adaptável às constantes e impositivas mudanças inerentes à gestão escolar e constrói grades horárias invariavelmente válidas, alinhadas às restrições essenciais (*hard constraints*) e não-essenciais (*soft constraints*) do contexto educacional da instituição, a um custo computacional aceitável, e foi apresentado à gestão da escola como uma proposta de ferramenta de apoio à tomada de decisão.

Na unidade de ensino estudada, a tarefa manual de construção de grades para um ano letivo demanda de três semanas a dois meses de tempo da gestão. Nesse contexto, os objetivos deste trabalho podem ser descritos como: (1) coletar dados internos sobre as regras e políticas de alocação de disciplinas e professores a turmas no CEEAL, (2) definir e modelar os objetivos e as restrições do problema de *school timetabling* associado, (3) definir as técnicas de solução a serem utilizadas, (4) implementar um algoritmo de desempenho satisfatório e computacionalmente viável para solução do problema e (5) refinar o modelo e a solução junto à gestão da instituição. Mediante consultas ao corpo docente e à equipe de gestão, foram identificadas as necessidades específicas da escola e estas, por sua vez, foram modeladas como um problema de PLB, dotado de função objetivo e um conjunto de restrições.

Há no modelo restrições essenciais (*hard constraints*) que dizem respeito ao máximo e mínimo de tempos de aula por professor e por turma, ao oferecimento de todas as disciplinas previstas no currículo, à qualificação dos docentes para ministrar uma disciplina, entre outras. E, considerando que há um interesse em preservar as preferências dos professores por dias e horários de aula, ponderadas por sua antiguidade no CEEAL, na construção das grades, existem restrições não essenciais (*soft constraints*) que penalizam a função objetivo, em certa medida, quando tais preferências são violadas. Por fim, a função objetivo se relaciona à intenção da gestão da escola de depender menos de professores contratados; nesse sentido, busca-se encontrar uma grade que minimize o número de docentes necessários, idealmente demandando apenas os concursados.

Para solução do problema de otimização, adotou-se o software de licença *Gurobi Optimizer*, acessível pela biblioteca *gurobipy* do Python. Após tentativas de cálculo de grades escolares em modelos de teste simplificados, os resultados preliminares apontaram que, em uma abordagem exata de PLB, exigir uma solução globalmente ótima para o problema é computacionalmente custoso em razão do elevado número de variáveis e restrições envolvidas e das limitações de recursos disponíveis para a pesquisa e na escola.

Associado ao *solver* de otimização, foi então customizado um algoritmo genético (AG) para viabilizar o refino de soluções. Essa integração é apresentada no Algoritmo 1. Nessa representação, os dados brutos são submetidos a uma etapa de pré-processamento (linha 1) e dizem respeito a informações do CEEAL, tais como a relação de disciplinas e turnos por turma, as habilitações e preferências de cada professor, entre outras. Em seguida, resolvendo um problema de PLB relaxado tantas vezes quanto se queira, são construídas distintas grades válidas (subótimas) na *inicialização* (linhas 2 e 3), gerando assim uma *população inicial geneticamente diversa*. A seguir, com um número de iterações (*gerações*)

pré-definido, todo o conjunto (*população*) de grades (*cromossomos*) (linhas 4 e 5) é sujeito a uma *seleção*, atualizado por passar pelos processos de *crossover* e *mutação* (linhas 6–8), que combinam e promovem alterações aleatórias nas grades, e submetido a uma *avaliação* de sua *fitness* (número de professores necessários) e do cumprimento das restrições (linha 9). As grades de melhor *fitness* são preservadas e replicadas inalteradas na geração seguinte pelo operador *elitismo* (linha 10). Por fim, as grades mais bem ranqueadas são retornadas (linha 11) e exibidas ao usuário na forma de planilhas (linha 12), estrutura de praxe na instituição.

Algoritmo 1 Solução do *school timetabling* da instituição.

- 1: **Entrada** e pré-processamento de dados
 - 2: **Até** atingir o tamanho da população **faça**
 - 3: Adicionar indivíduo à população
 - 4: **Até** atingir o número de gerações **faça**
 - 5: **Até** atualizar toda a população **faça**
 - 6: Selecionar um par g_1, g_2 de grades
 - 7: Aplicar o operador crossover a g_1, g_2
 - 8: Aplicar operador mutação ao crossover de g_1, g_2
 - 9: Avaliar as novas grades
 - 10: Aplicar o operador elitismo às melhores grades
 - 11: Obter as melhores grades
 - 12: **Saída** e pós-processamento de dados
-

Com a inclusão de um algoritmo genético na ferramenta de solução, a otimalidade global deixou de ser imperativa e passou-se a exigir dos modelos de otimização apenas a factibilidade das soluções na escola e a viabilidade computacional (o problema foi reformulado de modo a bastar encontrar ótimos locais). Robustas simulações computacionais apontaram o refinamento das soluções subótimas ao longo das iterações do AG (note a Tabela 1), em um tempo substancialmente inferior ao do método manual vigente na escola até então, levando à construção de grades corretas e ajustadas à realidade da instituição.

Tabela 1: Desempenho da solução das instâncias do problema de *school timetabling*.

Tamanho da população	Número de gerações	Tempo de execução (s)	<i>Fitness</i> da melhor grade
20	30	539,75	71
20	100	907,02	66
50	30	979,38	67
50	100	1.951,41	63
100	30	1.958,61	65
100	100	3.880,76	65
300	300	28.386,79	61

O programa implementado e as soluções encontradas foram apresentados à gestão da escola e, conforme novas necessidades surgiram, o modelo e o algoritmo foram ajustados. A todo momento, o diálogo com o corpo docente e a gestão da instituição, em um misto de expectativas e realidade escolar, se manteve.

Com essa mudança de paradigma, a otimalidade global das soluções encontradas passou a não ser garantida, mas o fator limitante computacional foi tratado. Assim, com base nos experimentos realizados, observou-se que associar um modelo de PLB a uma meta-heurística para refino dos resultados pode levar a uma ferramenta útil e viável para o *school timetabling* de uma escola pública, onde recursos (incluindo tempo e pessoal qualificado) podem ser limitados.

Referências

- [1] DUARTE, V. *Modelagem e solução do school timetabling de uma escola pública estadual do Rio de Janeiro*. Nova Iguaçu: Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, 2024. Monografia (Bacharelado em Matemática Aplicada e Computacional). Disponível em: <<https://sigaa.ufrjr.br/sigaa/verProdcucao?idProducao=4270998&key=f530ef7bf294830161d56c20ce82da30>>.

Impacto da Vacinação na Dinâmica da Transmissão do Sarampo: uma Abordagem via Modelagem Matemática

Victória Oliveira Porfírio dos Santos

Marcela Lima Santos Pereira

Claudia Mazza Dias

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, UFRRJ

Av. Gov. Roberto Silveira, s/n

26020-740, Nova Iguaçu, RJ

E-mail: victoriadody@ufrj.br

marcelalsantos@ufrj.br

mazza@ufrj.br

RESUMO

O sarampo é uma doença viral aguda e altamente contagiosa que continua sendo um desafio significativo de saúde pública, principalmente em países em desenvolvimento, como o Brasil [6, 1]. Apesar da disponibilidade de vacinas eficazes, nos últimos anos ocorreu um preocupante aumento de casos em diferentes regiões do país, especialmente entre crianças não vacinadas. Em 2025, entre as semanas epidemiológicas 1 e 16, o Brasil registrou cinco casos confirmados de sarampo [4, 7]. Esse cenário reforça a urgência de estratégias eficazes de vigilância, controle e imunização. Neste trabalho, estuda-se a modelagem da dinâmica de propagação do sarampo com base em um modelo compartimental do tipo SEIR+V, adaptado a partir de [2]. A população é dividida em quatro compartimentos principais: suscetíveis (S), expostos (E), infectados (I) e recuperados (R). A vacinação é incorporada ao modelo como uma taxa constante v , que transfere indivíduos do compartimento de suscetíveis diretamente para o de recuperados, assumindo imunidade completa e imediata. Considera-se ainda a presença de uma taxa de natalidade b e uma taxa de mortalidade natural μ . A dinâmica de transmissão é proposta pelo sistema de equações diferenciais (1):

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = b - \beta SI - \mu S - vS \\ \frac{dE}{dt} = \beta SI - (\epsilon + \mu)E \\ \frac{dI}{dt} = \epsilon E - (\gamma + \mu)I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R + vS, \end{cases} \quad (1)$$

sujeito à $S(0) = S_0$, $E(0) = E_0$, $I(0) = I_0$ e $R(0) = R_0$. Um esquema do modelo SEIR+V pode ser verificado na Figura 1. Os indivíduos nascem na classe de suscetíveis a uma taxa b , podem ser infectados a uma taxa β (βSI) e passam ao estado exposto (E), depois tornam-se infectados a uma taxa ϵ e, em seguida, recuperados a uma taxa γ . Há taxas de mortalidade natural μ incidentes em todos os compartimentos, e a vacinação confere a transferência de indivíduos do compartimento suscetíveis diretamente para os recuperados mediante a taxa de vacinação v .

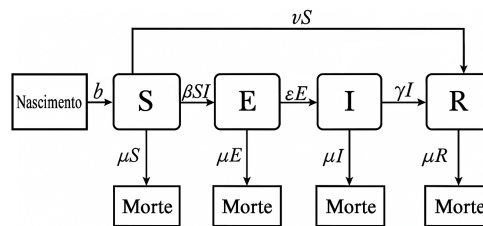


Figura 1: O modelo esquemático SEIR+V. Fonte: Adaptado de [2].

Foram realizadas simulações numéricas implementadas no ambiente GNU Octave¹, considerando os seguintes parâmetros: taxa de transmissão $\beta = 0,9$, taxa de progressão do período de latência $\epsilon = 1/10$,

¹Disponível em: <https://www.gnu.org/software/octave/>. Consulta: 04 ago. 2025.

taxa de recuperação $\gamma = 1/12$ e diferentes valores de cobertura vacinal v . Foram simulados três cenários: sem vacinação ($v = 0$), vacinação intermediária ($v = 0,5$) e alta cobertura vacinal ($v = 0,9$). Considerou-se $S(0) = 0,9$, $E(0) = 0,05$, $I(0) = 0,05$ e $R(0) = 0,0$.

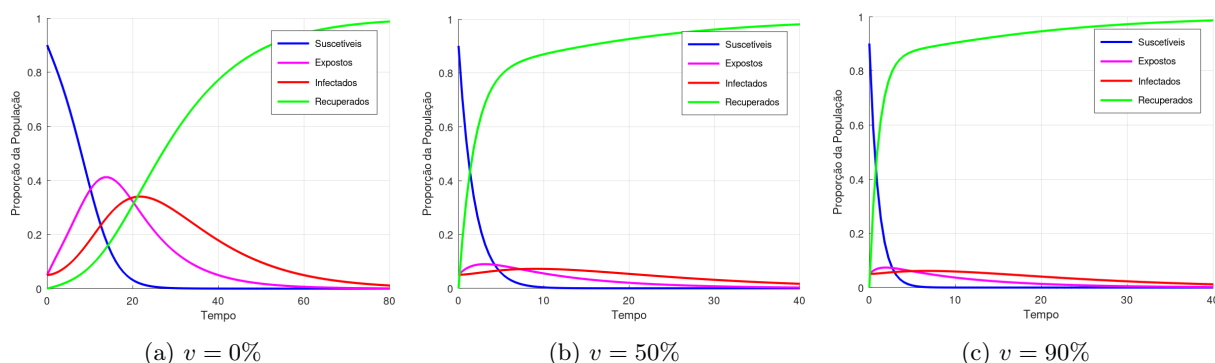


Figura 2: Comparação do modelo SEIR+V com diferentes taxas de vacinação v . Fonte: Autoras.

Os resultados apresentados na Figura 2 apontam que o aumento da taxa de vacinação reduz significativamente o número de indivíduos infectados e encurta a duração do surto. No caso sem vacinação, o modelo mostra um pico epidêmico elevado e prolongado. Para $v = 0,5$, observa-se redução no número de casos e antecipação do controle do surto. Já com $v = 0,9$ a curva de infectados é bastante reduzida, confirmando que altas coberturas vacinais são capazes de impedir a propagação do vírus na população. Esses achados estão em concordância com recomendações internacionais que indicam a necessidade de 95% de cobertura vacinal para eliminação sustentada do sarampo [1]. São também consistentes com dados epidemiológicos recentes: entre 2011 e 2020, o Brasil registrou 2.724 internações por sarampo, com pico em 2018, ano em que diversas regiões apresentaram cobertura vacinal abaixo do ideal [5, 3]. Dessa forma, este estudo reforça a importância da vacinação como estratégia essencial para o controle e possível erradicação do sarampo. A modelagem matemática, utilizada aqui como fruto de trabalho de iniciação científica, permite simular cenários e estimar o impacto de políticas públicas de imunização, contribuindo para a tomada de decisão em saúde pública, constituindo-se em um trabalho interdisciplinar que integra matemática, epidemiologia e computação.

Referências

- [1] MINISTÉRIO DA SAÚDE (BRASIL). *Boletim Epidemiológico do Sarampo*. Brasília: Governo Federal, 2023.
- [2] ONYEJEKWE, O. O.; KEBEDE, E. Z. Epidemiological modeling of measles infection with optimal control of vaccination and supportive treatment. *Applied and Computational Mathematics*, v. 4, n. 4, p. 264–274, 2015.
- [3] PAN AMERICAN HEALTH ORGANIZATION (PAHO). *Risk assessment of measles reemergence in Brazil*. Washington, D.C.: PAHO/WHO, mar. 2024. Disponível em: <https://www.paho.org/sites/default/files/2025-03/2025-mar-24-phe-risk-assessment-measles-final.pdf>. Acesso em: 04 ago. 2025.
- [4] PAN AMERICAN HEALTH ORGANIZATION (PAHO). *Epidemiological Update: Measles in the Region of the Americas – 2 May 2025*. Washington, D.C.: PAHO/WHO, 2025. Disponível em: <https://www.paho.org/sites/default/files/2025-05/2025-may-2-phe-epi-update-measles-final.pdf>. Acesso em: 04 ago. 2025.
- [5] SILVA, L. C. M.; OLIVEIRA, R. B.; SANTOS, A. F.; et al. Analysis of hospital admissions for measles in Brazil and correlation with vaccination coverage. *Revista de Saúde Pública*, v. 58, 2024.
- [6] WORLD HEALTH ORGANIZATION (WHO). *Measles – Region of the Americas. Disease Outbreak News*. Genebra: WHO, 2 maio 2025. Disponível em: <https://www.who.int/emergencies/disease-outbreak-news/item/2025-DON565>. Acesso em: 04 ago. 2025.
- [7] WORLD HEALTH ORGANIZATION (WHO). *Weekly Epidemiological Record – Measles situation update: Brazil and the Americas*. Genebra: WHO, abr. 2025.

O grupo fundamental do Círculo

Leandro Gines Egea

Victor Aquino Landim

Instituto de Ciências Exatas, UFF

Rua Desembargador Ellis Hermydio Figueira, 783

27213-145, Volta Redonda, RJ

E-mail: leandrogea@id.uff.br

victor_aquino@id.uff.br

RESUMO

O grupo fundamental do círculo $S \subset \mathbb{R}$ é um objeto de extrema importância no estudo de topologia algébrica, com aplicações em vários contextos diferentes. Com isso definido, introduziremos o grupo fundamental de um espaço topológico e mostraremos qual é o grupo fundamental de S^1 .

Referências

- [1] GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. *Elementos de Álgebra*. Rio de Janeiro: IMPA
- [2] MUNKRES, J. R. *Topology*. New Jersey: Prentice-Hall, 2000.

Aritmética do Ponto Flutuante

Vitor Gabriel de Sousa Campbell

Wellington Carlos de Jesus

Instituto Ciências Exatas, UFF

Rua Desembargador Ellis Hermydio Figueira, 783

27213-145 Volta Redonda, RJ

E-mail: vitorsousa@id.uff.br

wellingtonjesus@id.uff.br

RESUMO

Ao estudar conjuntos de números reais, notamos algumas propriedades, as quais esperamos encontrar em todos os tipos de estrutura algébrica ao definir operações sobre os elementos desse conjunto. Os números em representação de ponto flutuante, que são a forma como os computadores representam números reais, formam um conjunto com uma estrutura algébrica peculiar. Diferentemente do conjunto de todos os números reais, esse conjunto não possui algumas propriedades fundamentais das operações matemáticas. As operações com números de ponto flutuante, como a adição e a multiplicação, não são nem ao menos associativas, o que significa que a ordem em que os números para a operação afeta o resultado. Essa falta de associatividade é um dos principais motivos para os erros de arredondamento que ocorrem no cálculo computacional. Esses comportamentos estranhos levam a uma série de consequências inesperadas. Esse trabalho busca, a partir da definição do conjunto dos números de ponto flutuante e suas operações, estudar o comportamento desses números, apresentando suas propriedades algébricas, para expor as limitações dessa representação e propor ferramentas teóricas e algorítmicas para se quantificar os erros de cálculo que surgem dessas limitações e algoritmos para que esses erros sejam minimizados e corrigidos. Isso é ilustrado por meio de alguns exemplos práticos. As ferramentas apresentadas são algoritmos de quantificação de erro, como o algoritmo FMA, o qual computa a soma e multiplicação entre três números com um único arredondamento. Outros algoritmos são FastTwoSum e Kahan. Estes calculam a soma entre dois números de ponto flutuante computando o erro, e retornam a soma com o erro corrigido. Limitações desses algoritmos também são apresentadas, bem como exemplos de outras técnicas e abordagens para se lidar com os erros que surgem. Os algoritmos e ferramentas permitem lidar com os erros que surgem e melhoram os resultados das operações, mas não eliminam completamente esses erros. Concluímos que existem uma série de complicações trazidas pela estrutura dos números de ponto flutuante. Algumas alternativas existem para que se possa trabalhar com os números de ponto flutuante com maior acurácia. Em geral, os métodos de correção de erro apresentam limitações próprias e não são suficientes para se eliminar completamente os erros, mas esses métodos permitem que os erros sejam minimizados e a representação seja mais eficiente. Novas técnicas devem ser estudadas e aprimoradas para se aperfeiçoar a representação em ponto flutuante.

Referências

- [1] HIGHAM, N. The mathematics of floating point arithmetic. *LMS Newsletter*, 2021.
- [2] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais. 2. ed. *Pearson Prentice Hall*, 2003, p. 10–22.

Capítulo 6

Resumos das Sessões Orais

Otimização do fluxo de dados em uma rede Ad Hoc com Múltiplos Caminhos

Axl Silva de Andrade

Instituto de Ciências Exatas, UFRRJ
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
25555-120, São João de Meriti, RJ
E-mail: axlsandrade@ufrj.br

RESUMO

A otimização do fluxo de dados em redes ad hoc sem fio é um desafio crucial para garantir a comunicação em cenários sem infraestrutura, como operações de emergência. Este trabalho aborda o problema de roteamento com múltiplos caminhos, visando minimizar a latência total da comunicação entre um par origem-destino, sujeito a restrições de capacidade nos enlaces. A rede é modelada como um grafo direcionado e, para resolver este problema de otimização combinatória, aplica-se um Algoritmo Genético. A metodologia codifica rotas como indivíduos e utiliza uma função de aptidão que penaliza a violação de capacidade. Simulações computacionais, implementadas em Python, demonstram a eficácia do algoritmo em encontrar soluções robustas e de baixa latência, reforçando a aplicabilidade de meta-heurísticas na gestão de redes complexas.

Palavras-chave: Algoritmos Genéticos, Redes Ad Hoc, Múltiplos Caminhos, Otimização Combinatória, Otimização de Fluxo.

1. Introdução e Modelagem do Problema

Redes de comunicação ad hoc, formadas por dispositivos móveis sem uma infraestrutura fixa, são vitais em cenários de emergência [7]. O objetivo deste trabalho é minimizar a latência total do envio de dados, utilizando múltiplos caminhos para balancear a carga [6]. O problema é modelado matematicamente representando a rede como um grafo direcionado $G = (V, E)$, onde cada aresta $(i, j) \in E$ possui uma latência ℓ_{ij} e uma capacidade de fluxo c_{ij} [1].

2. Técnica de Solução: Algoritmo Genético

Para encontrar a rota ótima, foi implementado um Algoritmo Genético (AG) [3]. No AG, indivíduos são codificados como caminhos da origem ao destino e sua aptidão (fitness) é inversamente proporcional à soma das latências. Soluções que violam a capacidade de um enlace recebem alta penalidade. Operadores de seleção, cruzamento e mutação são usados para evoluir a população. A implementação foi realizada em Python, com as bibliotecas NetworkX e NumPy [4, 5].

3. Resultados, Análise Crítica e Conclusão

As simulações foram conduzidas em uma rede ad hoc representada por um grafo direcionado com **10 nós e 16 arestas**. O AG foi configurado para rotear uma demanda de $d = 10$ unidades entre os nós de origem s e destino t . As simulações demonstraram que o AG convergiu **rapidamente** para soluções de alta qualidade, identificando rotas de baixa latência que respeitam as capacidades dos enlaces. A abordagem se mostrou eficaz e computacionalmente viável.

A **Análise Crítica** confirmou que a abordagem é um método promissor para o planejamento de rotas em cenários dinâmicos. A introdução da penalização para caminhos que violam a capacidade foi fundamental para a **viabilidade das soluções** no processo evolutivo. Entretanto, por se tratar de uma **abordagem heurística**, o AG não garante a obtenção da solução ótima global, uma característica inerente a métodos que trocam a garantia de otimalidade por tempo computacional viável.

Em conclusão, os resultados indicam que os AGs são ferramentas promissoras para resolver problemas de roteamento com múltiplas restrições em redes ad hoc, reforçando sua validade como técnica de solução para problemas de otimização combinatória complexos. As sugestões de trabalhos futuros incluem a modelagem de **tráfego concorrente** e a **adaptação** do algoritmo para **redes com topologia variável**.

4. Código e Reprodutibilidade

O código-fonte utilizado para a modelagem e as simulações computacionais deste trabalho está disponível publicamente no repositório GitHub: <https://github.com/axlandrade/ga-multipath-routing>.

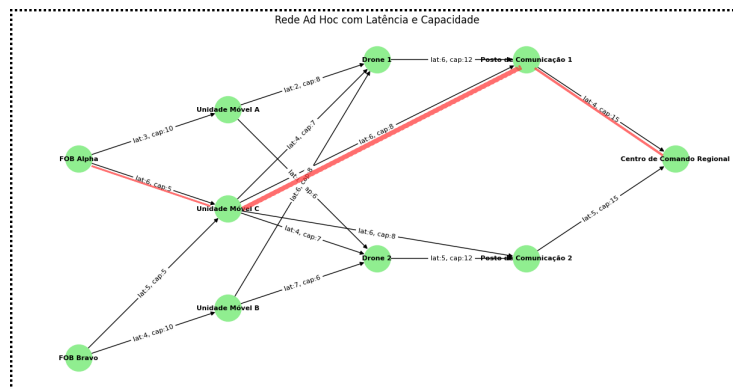


Figura 1: Topologia da Rede Ad Hoc simulada com 10 nós e 16 arestas, destacando os parâmetros de latência (ℓ) e capacidade (c) de cada enlace. A rota de latência mínima encontrada pelo Algoritmo Genético está realçada em vermelho.

Tabela 1: Parâmetros de Calibração do Algoritmo Genético

Parâmetro	Valor	Descrição
Nós / Arestas	10 / 16	Dimensão do grafo simulado
Demanda de Fluxo (d)	10 unidades	Restrição mínima de capacidade
Tamanho da População	30	Indivíduos avaliados por geração
Nº de Gerações	50	Critério de parada da otimização
Taxa de Mutação	0.3 (30%)	Probabilidade de alteração em um indivíduo

Referências

- [1] AHUJA, R. K.; MAGNANTI, T. L.; ORLIN, J. B. **Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1993.
- [2] CORMEN, T. H. et al. **Introduction to Algorithms**. 3. ed. Cambridge, MA: The MIT Press, 2009.
- [3] GOLDBERG, D. E. **Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning**. Reading, MA: Addison-Wesley, 1989.
- [4] HAGBERG, A. A.; SCHULT, D. A.; SWART, P. J. Exploring network structure, dynamics, and function using NetworkX. In: PYTHON IN SCIENCE CONFERENCE, 7., 2008, Pasadena. *Proceedings...* p. 11-15.
- [5] HARRIS, C. R. et al. Array programming with NumPy. **Nature**, v. 585, p. 357-362, 2020. DOI: 10.1038/s41586-020-2649-2.
- [6] MARINA, M. K.; DAS, S. R. On-demand multipath distance vector routing in ad hoc networks. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON NETWORK PROTOCOLS, 9., 2001. *Proceedings...* p. 14-23. DOI: 10.1109/ICNP.2001.992826.
- [7] TANEJA, A. et al. A survey of routing and channel assignment in multi-radio multi-channel wireless mesh networks. **Journal of Network and Computer Applications**, v. 34, n. 1, p. 2-15, 2011. DOI: 10.1016/j.jnca.2010.07.001.

O Papel da Educação Financeira no Ensino Básico: Uma Análise das Políticas Públicas e dos Desafios de Implementação

Israel Araújo Botelho*

Breno Henrique de Freitas Rodrigues Jesuino[†]

Instituto Federal do Rio de Janeiro, IFRJ

R. Sebastião de Lacerda - Fábrica

26600-000, Paracambi - RJ

E-mail: israelpbd@gmail.com

brenohsd1@gmail.com

Nathália de Almeida Leite da Silva

Deumara Galdino de Oliveira

Instituto Federal do Rio de Janeiro, IFRJ

R. Sebastião de Lacerda - Fábrica

26600-000, Paracambi - RJ

E-mail: nathalia.silva@ifrj.edu.br

deumara.oliveira@ifrj.edu.br

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo discutir o papel da Educação Financeira no contexto escolar, analisando suas implicações sociais, os avanços legais já instituídos e os desafios ainda existentes para sua consolidação. A pesquisa foi desenvolvida por meio de levantamento bibliográfico de caráter qualitativo e exploratório, com base em artigos, livros e documentos oficiais, priorizando os subtemas: conceito de Educação Financeira, legislação relacionada ao tema e experiências de sua implementação no ensino básico. O aumento do consumismo e o conseqüente crescimento do endividamento das famílias brasileiras evidenciam a necessidade de inserir a Educação Financeira no ensino básico como instrumento de formação crítica e cidadã. O fácil acesso ao crédito e os estímulos de consumo têm levado grande parte da população ao endividamento, dificultando o planejamento financeiro de longo prazo [1]. A ausência de práticas consolidadas de Educação Financeira nas famílias e escolas fragiliza a capacidade dos indivíduos de tomar decisões econômicas responsáveis [9]. Os resultados indicam que a ausência de práticas consistentes no ambiente escolar e familiar reforça padrões de consumo irresponsáveis [5]. Estudos recentes mostram que a introdução da Educação Financeira desde os primeiros anos escolares, embora necessária, ainda carece de formação docente e estratégias pedagógicas efetivas [6]. Além disso, pesquisas revelam que apenas uma parcela reduzida dos jovens brasileiros poupa ou planeja seus gastos, evidenciando a urgência de um ensino sistemático de práticas financeiras [10]. A integração entre Educação Financeira e Educação Matemática tem se mostrado uma alternativa eficiente para contextualizar o aprendizado e aproximá-lo da realidade cotidiana dos estudantes [7] [1]. Do ponto de vista normativo, a Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF), instituída pelo Decreto nº 7.397/2010, e as diretrizes mais recentes de políticas públicas em torno da Educação Financeira representam avanços importantes [2] [3] [10]. Entretanto, persistem dificuldades quanto à efetiva implementação da temática nas escolas, à formação continuada de professores e ao envolvimento das famílias [8]. Dessa forma, a Educação Financeira, quando abordada de forma sistemática e crítica, transcende a simples administração de recursos e se consolida como instrumento de transformação social. Sua presença no ensino básico contribui para fortalecer a cidadania e fomentar uma cultura de responsabilidade econômica, permitindo que os indivíduos enfrentem de maneira consciente os desafios de um mundo marcado pelo consumo e pelas desigualdades [4] [11].

Referências

- [1] ANDRADE, Flávio Gonçalves de et al. Educação Financeira no Ensino Fundamental: uma revisão bibliográfica e proposta de ensino. Em Teia, v. 12, n. 2, p. 1-17, 2021.

*Bolsista de Iniciação Científica PIBIC/IFRJ

[†]Bolsista de Iniciação Científica PIBIC/IFRJ

- [2] BRASIL. Decreto nº 7.397, de 22 de dezembro de 2010. Institui a Estratégia Nacional de Educação Financeira – ENEF.
- [3] BUFALO, Daniela Cristina Lourenço; PINTO, Rafael Ângelo Bunhi. Políticas públicas de educação financeira: do processo histórico às ações práticas em Instituições de Ensino Superior. Avaliação: Revista da Avaliação da Educação Superior, Campinas; Sorocaba, SP, v. 28, e023023, 2023.
- [4] DOMINGOS, Reinaldo. A importância da educação financeira nas escolas. A Tribuna News, 2014.
- [5] FERREIRA, Hugo Chaves B.; LIMA, João Policarpo R. A insustentável leveza do ter: crédito e consumismo no Brasil. Revista da Sociedade Brasileira de Economia Política, n. 38, p. 59-86, 2014.
- [6] FRANÇA, Clévia Israel Faria; FIGUEIREDO, Helenara Regina Sampaio. Educação financeira nos anos iniciais do ensino fundamental: revisão sistemática em banco de dados. Research, Society and Development, v. 10, n. 13, e194101320926, 2021.
- [7] HOFMANN, Ruth Margareth; MORO, Maria Lucia Faria. Educação matemática e educação financeira: perspectivas para a ENEF. Zetetiké, v. 20, n. 2, p. 37-54, 2013.
- [8] LOPES, Marcos Antonio Campelo; TYMINSKI JUNIOR, Jorge. A importância da educação financeira no ensino escolar: revisão integrativa. Episteme Transversalis, v. 12, n. 3, p. 130-148, 2021.
- [9] OLIVEIRA, Savana da Silva; STEIN, Nina Rosa. A Educação Financeira na Educação Básica: um novo desafio na formação de professores. Universo Acadêmico, v. 8, n. 1, p. 11-31, 2015.
- [10] SILVA, Tarcísio Pedro da; MAGRO, Cristian Baú Dal; GORLA, Marcello Christiano; NAKAMURA, Wilson Toshiro. Nível de educação financeira de estudantes do ensino médio e suas reflexões econômicas. Revista de Administração, São Paulo, v. 52, n. 3, p. 285-303, jul./set. 2017. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rausp.2016.12.010>
- [11] ZANDONAI, Camila Dozza. Discriminação indireta e o estudo da teoria do impacto desproporcional nas relações de trabalho. Revista da Escola Judicial do TRT4, v. 1, n. 2, p. 91-118, 2019.

Modelo de Markov Oculto: algoritmo EM e amostrador de Gibbs

Daniela Sano Adathi*

Florencia Graciela Leonardi

Instituto de Matemática e Estatística, USP

R. do Matão, 1010

05508-090, São Paulo, SP

E-mail: danielasano@ime.usp.br

florencia@usp.br

RESUMO

Historicamente, o conceito de cadeias de Markov foi introduzido por Andrey Markov no século XX, época em que também foram iniciados os estudos de modelo de Markov oculto por Leonard Baum e colaboradores, que também desenvolveram algoritmos utilizados atualmente, como algoritmo de Viterbi, forward-backward, Baum-Welch. Após isso, os modelos de Markov oculto começaram a ganhar aplicações no reconhecimento de fala e em diversas outras áreas, como na biologia, engenharia e economia.

Cadeias de Markov são uma sequência de variáveis aleatórias $\{X_n\}_{n \geq 0}$ que assumem valores no espaço de estado $\{s_1, \dots, s_k\}$ e quando, para todo $n \geq 0$, a dependência do próximo estado da cadeia, ou seja, X_{n+1} depende apenas do estado anterior, X_n , e não de todos os estados anteriores X_0, \dots, X_n . Por sua vez, o *modelo de Markov Oculto* (HMM) é um processo bivariado com tempo discreto $\{(X_k, Y_k)\}$, em que o processo $\{X_k\}_{k \geq 0}$ é uma cadeia de Markov com espaço de estado finito $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ e é não observável (processo oculto), enquanto o processo $\{Y_k\}_{k \geq 0}$ é o processo com estados observáveis $O = \{o_1, \dots, o_k\}$, em que Y_k depende apenas de X_k .

Este trabalho tem o objetivo de estimar os parâmetros dos estados ocultos a partir dos estados observáveis comparando a eficiência de dois algoritmos: o algoritmo EM (Expectation-Maximization) e o amostrador de Gibbs. Para realizar esta comparação, vamos considerar o modelo de Markov oculto com 3 estados e Gaussiano, ou seja, $Y_k | X_k = i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$. Assim, queremos estimar a matriz de transição do processo oculto, as médias (μ_1, μ_2, μ_3) e σ , em que os verdadeiros parâmetros são $\mu = (-2, 0, 2)$, $\sigma \in \{0.5, 1, 1.5\}$ e matriz de transição

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Para o E-step do algoritmo EM, em que o objetivo é estimar a distribuição dos estados ocultos, utilizaremos o procedimento forward para calcular a probabilidade da cadeia estar em um estado oculto considerando os dados observáveis até o tempo k . Utilizaremos também o procedimento backward para calcular a probabilidade dos dados futuros considerando a cadeia em um estado oculto no tempo k . Assim, para isso, calcule as variáveis forward: $\alpha_k(i) \propto \mathbb{P}(Y_1, \dots, Y_k, X_k = i | \theta^{(t)})$, em que θ são os parâmetros que queremos estimar; inicialize: $\alpha_1(i) \propto \rho_i^{(t)} \phi(y_1; \mu_i^{(t)}, \sigma^{2(t)})$, em que $\rho_i = \mathbb{P}(X_1 = i)$ e $\phi(y_1; \mu, \sigma^2)$ é a função densidade da distribuição Normal no ponto Y_1 condicionada a

$X_1 = i$; realize recursão: $\alpha_{k+1}(j) \propto \phi(y_{k+1}; \mu_j^{(t)}, \sigma^{2(t)}) \sum_{i=1}^3 \alpha_k(i) a_{ij}^{(t)}$; calcule as variáveis backward:

$\beta_k(i) \propto \mathbb{P}(Y_{k+1}, \dots, Y_n | X_k = i, \theta^{(t)})$; inicialize: $\beta_n(i) = 1$; realize a recursão: $\beta_k(i) \propto$

$\sum_{j=1}^3 a_{ij}^{(t)} \phi(y_{k+1}; \mu_j^{(t)}, \sigma^{2(t)}) \beta_{k+1}(j)$; calcule

$$\gamma_k(i) = \mathbb{P}(X_k = i | Y_1, \dots, Y_n, \theta^{(t)}) = \frac{\alpha_k(i) \beta_k(i)}{\sum_{j=1}^3 \alpha_k(j) \beta_k(j)}$$

*Bolsista de Mestrado da Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP). Este trabalho foi feito com o apoio da FAPESP (processo 2025/09861-6).

e

$$p_k(i, j) = \mathbb{P}(X_k = i, X_{k+1} = j | Y_1, \dots, Y_n, \theta^{(t)}) = \frac{\alpha_k(i) a_{ij}^{(t)} \phi(y_{k+1}; \mu_j^{(t)}, \sigma^{2(t)}) \beta_{k+1}(j)}{\sum_{i,j} \alpha_k(i) a_{ij}^{(t)} \phi(y_{k+1}; \mu_j^{(t)}, \sigma^{2(t)}) \beta_{k+1}(j)}.$$

Enquanto para o M-step o objetivo é atualizar os parâmetros. Assim, a atualização da média, variância, matriz de transição e probabilidades iniciais estão apresentadas, respectivamente, a seguir.

$$\begin{aligned} \mu_i^{(t+1)} &= \frac{\sum_{k=1}^n \gamma_k(i) y_k}{\sum_{k=1}^n \gamma_k(i)}, & \sigma^{2(t+1)} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^3 \gamma_k(i) (y_k - \mu_i^{(t+1)})^2 \\ a_{ij}^{(t+1)} &= \frac{\sum_{k=1}^{n-1} p_k(i, j)}{\sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(i)}, & \rho_i^{(t+1)} &= \gamma_1(i). \end{aligned}$$

Como nosso objetivo é encontrar a distribuição conjunta dos parâmetros e dos estados ocultos, o algoritmo que podemos utilizar, a fim de comparar eficiência com o algoritmo EM, é o amostrador de Gibbs. Nesse caso, o algoritmo alterna entre simular $X|Y, \theta$ e simular $\theta|X, Y$, em que $\theta = (\mu, \sigma^2, A)$ e para $i = 1, 2, 3$, $\mu_i \sim N\left(\frac{\min y_k + \max y_k}{2}, (\max y_k - \min y_k)^2\right)$, $\sigma^{-2} \sim \Gamma(2, \beta)$, com $\beta \sim \Gamma\left(0.2, \frac{10}{(\max y_k - \min y_k)^2}\right)$, $(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}) \sim \text{Dirichlet}(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3})$. A partir dessas distribuições e a partir de resultados de conjugação, conseguimos obter as distribuições condicionais que precisamos para que seja possível realizar as simulações. Assim, simule os estados ocultos $X^{(t)}|Y, \theta^{(t-1)}$ utilizando o algoritmo forward-backward; para $i = 1, 2, 3$, simule

$$\mu_i | X, Y, \sigma^2 \sim N\left(\frac{\sum_{k: X_k=i} y_k + \sigma^2 \frac{\min y_k + \max y_k}{2(\max y_k - \min y_k)^2}}{n_i + \frac{\sigma^2}{(\max y_k - \min y_k)^2}}, \frac{\sigma^2}{n_i + \frac{\sigma^2}{(\max y_k - \min y_k)^2}}\right),$$

em que n_i é o número de visitas da sequência de estados oculta ao estado i ; simule $\sigma^{-2}|X, Y, \mu \sim \Gamma\left(2 + \frac{n}{2}, \beta + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (y_k - \mu_{X_k})^2\right)$; simule $\beta|\sigma^{-2} \sim \Gamma\left(2.2, \frac{10}{(\max y_k - \min y_k)^2}\right)$; para $i = 1, 2, 3$, simule $(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})|X \sim \text{Dirichlet}(n_{i1} + 1, n_{i2} + 1, n_{i3} + 1)$, com n_{ij} sendo o número de transições do estado i a j na cadeia de Markov oculta com independência condicional nas linhas i da matriz de transição.

Logo, através dos dois algoritmos apresentados neste trabalho e utilizando resultados de conjugação, é possível realizar aplicações em outros casos, como quando não se sabe o número de estados, por exemplo, e realizar simulações para avaliar qual algoritmo apresenta a melhor eficiência.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi produzido como parte das atividades da pesquisa Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), Centro de Inovação e Difusão em Neuromatemática (processo 2025/09861-6), FAPESP. Assim, agradeço à FAPESP, à CAPES pela bolsa parcial e ao Instituto de Matemática e Estatística (IME/USP) pelo apoio. As opiniões, hipóteses e conclusões ou recomendações expressas neste material são de responsabilidade das autoras e não necessariamente refletem a visão da FAPESP.

Referências

- [1] BLITZTEIN, J. K.; HWANG, J. *Introduction to Probability*. Florida: CRC Press, 2019.
- [2] DYMARSKI, P. *Hidden Markov Models, Theory and Applications*. Rijeka: IntechOpen, 2011.
- [3] RYDÉN, T. *EM versus Markov chain Monte Carlo for estimation of hidden Markov models: a computational perspective*. Bayesian Analysis, v. 3, n. 4, p. 659-688, 2008.

Geração de Aproximações do Método das Diferenças Finitas com 9 pontos para resolver a Equação de Laplace

Alexander Gama Amaral

Escola Firjan SESI
 Rua da Educação, 123
 27100-000, Barra do Piraí, RJ
 E-mail: agamaa123@gmail.com

Érika de Carvalho Cabral da Silva*
Carlos Andrés Reyna Vera-Tudela
Danilo Vasconcelos dos Santos†

PPG em Modelagem Matemática e Computacional, UFRRJ
 Rodovia BR 465, Km 7
 23897-970, Seropédica, RJ

E-mail: erikadccabral@yahoo.com.br candres@ufrj.br vasconcelos@ufrj.br

RESUMO

Introdução

Nas últimas décadas, os métodos numéricos tornaram-se ferramentas essenciais na modelagem de problemas científicos e de engenharia. Na hidrologia, a lei de Darcy descreve o fluxo de fluidos através de meios porosos, governado pela equação de Laplace, uma equação elíptica em derivadas parciais. O Método das Diferenças Finitas (MDF) é um método clássico para resolver equações diferenciais, baseado na aproximação de derivadas por diferenças finitas obtidas da série de Taylor.

Na formulação tradicional 2D, o MDF utiliza o nó central e os nós anterior e posterior nas direções x e y , totalizando 5 nós. Este trabalho propõe uma extensão que utiliza o nó central e os 8 nós circundantes, totalizando 9 nós, permitindo obter aproximações mais precisas com ordem de convergência superior.

MDF com 5 Pontos

Para a equação de Poisson em 2D:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad a < x < b, \quad c < y < d \quad (1)$$

Com condições de contorno de Dirichlet. Utilizando uma malha uniforme com $\Delta x = \Delta y = h$, as aproximações para as derivadas são:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\varepsilon_i, y_i) \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{i,j} \approx \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \eta_i) \quad (3)$$

Somando, obtém-se a formulação de 5 pontos:

$$\frac{u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1}}{h^2} = f_{i,j} + O(h^2) \quad (4)$$

*Bolsista Pós-Graduação CAPES

†Bolsista Pós-Graduação CAPES

MDF com 9 Pontos

A formulação com 9 pontos produz aproximações de quarta ordem:

$$\nabla^2 u_{ij} = \frac{1}{6h^2} [u_{i-1,j-1} + 4u_{i-1,j} + u_{i-1,j+1} + 4u_{i,j-1} - 20u_{i,j} + 4u_{i,j+1} + u_{i+1,j-1} + 4u_{i+1,j} + u_{i+1,j+1}] \quad (5)$$

A expansão em série de Taylor revela que:

$$\nabla^2 u(x_i, y_j) = \nabla^2 u + \frac{h^2}{2} [u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}] + O(h^4) \quad (6)$$

O erro dominante é dado por $\nabla^2(\nabla^2 u) = \nabla^2(f)$, permitindo calcular o erro de truncamento a partir de f sem conhecimento prévio de u .

Exemplo de Aplicação e Resultados

O problema analisado é de percolação bidimensional em regime permanente, governado pela equação de Laplace com condições de contorno:

$$-u = 1 \text{ em } y = 0, x = 0 \text{ e } x = W - u = \sin(\pi x/W) + 1 \text{ em } y = H$$

Com dimensões $W = H = 6$. A solução analítica é:

$$u = \frac{\sinh(\pi y/W)}{\sinh(\pi H/W)} + 1 \quad (7)$$

A Tabela 1 apresenta a norma do erro para diferentes valores de n (número de pontos na malha):

Tabela 1: Norma dos erros entre os métodos de 5 e 9 pontos

n	h	$\ u - u(x, y)\ _5 = \ u - u(x, y)\ _9$
6	1.20000	2.66345E-02
11	0.60000	1.37351E-02
21	0.30000	6.91521E-03
41	0.15000	3.46338E-03
81	0.07500	1.73241E-03
141	0.04286	9.90038E-04
300	0.02007	4.63579E-04

Observa-se que a norma do erro diminui à medida que se aumenta a discretização da malha, demonstrando convergência. Curiosamente, os erros para os métodos de 5 e 9 pontos foram idênticos neste exemplo específico, possivelmente devido à simetria do problema ou à natureza da solução analítica utilizada.

Referências

- [1] Burden, R. and Faires, J. D. (2016), "Análise Numérica", 3^o ed., Cengage Learning.
- [2] Engler, M. (2007), "Desenvolvimento de Metodologia para a Determinação da Mobilidade da Água no Solo", Tese de Doutorado, ESALQ.
- [3] Forsythe, G. E. and Wasow, W. R. (1960), "Finite-difference for partial differential equations", Wiley.
- [4] Pandey, A. et al. (2016), "Physically based soil erosion and sediment yield model", Catena, 147, 595-620.
- [5] Prevedello, C. L. and Armindo, R. A. (2015), "Física do Solo com Problemas Resolvidos", 2^a ed.
- [6] Rosser, J. B. (1975), "Nine Point difference Solutions for Poisson's Equation", Comp. & Math. with Appl., 1, 351-360.
- [7] Smith, G. D. (1986), "Numerical Solution of Partial Differential Equations", 3^o ed., Clarendon Press.
- [8] Zill, D. G. and Cullen, M. R. (2001), "Equações Diferenciais", 3^a ed., Pearson.

Rotulação Antimágica Local dos Grafos Fireflies

Lara Rodrigues Ventura*

Programa de Pós Graduação - MCCT, UFF
 Avenida dos Trabalhadores, 420
 27255-125, Volta Redonda, RJ
 E-mail: laraventura@id.uff.br

André Ebling Brondani

Francisca Andrea Macedo França

Instituto de Ciências Exatas, UFF
 Rua Desembargador Ellis Hermydio Figueira, 783
 27213415, Volta Redonda, RJ
 E-mail: andrebrondani@id.uff.br francisca_franca@id.uff.br

Introdução

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo simples e $f : E \rightarrow \{1, 2, \dots, |E|\}$ uma bijeção. Para cada $v \in V$, o peso de v é dado por $f^+(v) = \sum_{e \in E(v)} f(e)$, onde $E(v)$ denota o conjunto das arestas que incidem em v . Quando $f^+(v) \neq f^+(u)$ para todo par de vértices distintos $v, u \in V$, a bijeção f é denominada **rotulação antimágica** de G . Se uma tal rotulação existir, G é dito **grafo antimágico**. Em 1990, Hartsfield e Ringel [5] introduziram o conceito de rotulação antimágica de um grafo e conjecturaram que todo grafo conexo, com exceção do grafo completo K_2 , é um grafo antimágico. Desde então, a conjectura tem recebido muita atenção, e foi provada para várias classes especiais de grafos. Entretanto, a conjectura ainda não foi resolvida, mesmo para algumas classes de grafos particularmente simples, como árvores.

Em 2017, Arumugam *et al.* [1] e Bensmail *et al.* [4] introduziram, independentemente, o conceito de **rotulação antimágica local** de um grafo G como uma versão local do conceito de rotulação antimágica de Hartsfield e Ringel, para o caso em que $f^+(v) \neq f^+(u)$ para cada par de vértices adjacentes em G . Um grafo que admite tal rotulação é chamado **grafo antimágico local**. Ambos os grupos conjecturaram que todo grafo conexo, exceto K_2 , é um grafo antimágico local. Tal conjectura foi provada, em 2018, por Haslegrave [6] usando métodos probabilísticos.

Qualquer rotulação antimágica local induz uma rotulação de vértices própria de G onde o peso do vértice $f^+(u)$ é o rótulo de u . Isso naturalmente leva ao conceito do número cromático antimágico local introduzido em [1]. O **número cromático antimágico local**, $\chi_{la}(G)$, é definido como o número mínimo de rótulos obtidos em todas as rotulações de G induzidas por rotulações antimágicas locais de G . Tal invariante já foi estudado em algumas classes de grafos, veja [1]. Motivados por esta definição, investigamos o problema para a classe dos grafos *fireflies*.

De acordo com Aouchiche *et al.* [2] um **grafo firefly**, denotado por $F_{r,s,t}$, é um grafo de ordem $n = 2r + s + 2t + 1$, que consiste de r triângulos, s arestas pendentes e t caminhos pendentes de comprimento 2, todos compartilhando um vértice em comum. Denotemos por \mathcal{F}_n o conjunto de todos os grafos *Fireflies* com n vértices. Note que \mathcal{F}_n contém a estrela, $F_{0,s,0}$, o grafo *stretched stars*, $F_{0,s,t}$, o grafo da amizade, $F_{r,0,0}$, e o grafo borboleta, $F_{r,s,0}$. Além disso, para cada $n \geq 2$ temos

$$\mathcal{F}_n = \{F_{r,0,0}, F_{0,s,0}, F_{0,0,t}; r, s, t \geq 1\} \cup \{F_{r,s,0}, F_{r,0,t}, F_{0,s,t}; r, s, t \geq 1\} \cup \{F_{r,s,t}; r, s, t \geq 1\}.$$

Em Arumugam *et al.* [1] é determinado o número cromático antimágico local de várias classes de grafos tais como caminhos, ciclos, certos grafos bipartidos completos e os grafos roda. Em particular, os autores mostram que $\chi_{la}(F_{r,0,0}) = 3$, $\chi_{la}(F_{0,s,0}) = s + 1$ e $\chi_{la}(F_{0,1,t}) = t + 2$.

Neste trabalho, construímos rotulações antimágicas locais e determinamos expressões para o número cromático antimágico local para a classe dos grafos *fireflies*, que contém subclasses importantes de grafos

*Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

tais como o grafo estrela, o grafo da amizade e o grafo borboleta. A seguir, enunciamos parte dos resultados obtidos.

Teorema 1. Sejam r , s e t inteiros positivos. O número cromático antimágico local do grafo *firefly* $F_{r,s,t}$ é dado por

$$\chi_{la}(F_{r,s,t}) = \begin{cases} s + t + 1, & \text{se } r \leq t; \\ s + t + 2, & \text{se } r > t. \end{cases}$$

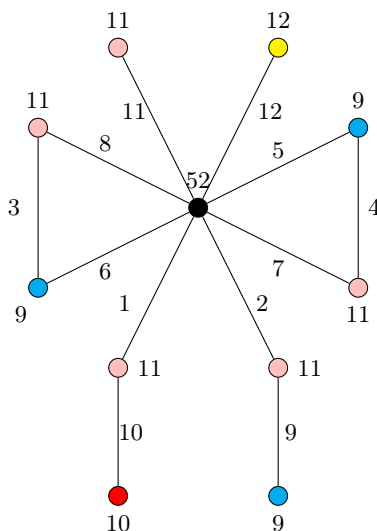


Figura 1: Grafo $F_{2,2,2}$ com $\chi_{la}(F_{2,2,2}) = 5$.

Agradecimentos

A primeira autora agradece ao PPG-MCCT/UFF e à CAPES, (processo 88887968288/2024-00), pelo apoio.

Referências

- [1] ARUMUGAM, S.; PREMALATHA, K.; BACA, M.; SEMANICOVÁ-FENOVIČKOVÁ, A. Local antimagic vertex coloring of a graph. *Graphs and Combinatorics*, v. 33, p. 275–285, 2017.
- [2] AOUCICHE, M.; HANSEN, P.; LUCAS, C. On the extremal values of the second largest Q -eigenvalue. *Linear Algebra and its Applications*, v. 435, p. 2591–2606, 2011.
- [3] BACA, M.; SEMANICOVÁ-FENOVIČKOVÁ, A.; LAI, R.-T.; WANG, T.-M. On local antimagic vertex coloring for complete full t -ary trees. *Fundamenta Informaticae*, v. 185, n. 2, p. 99–113, 2022.
- [4] BENSMAIL, J.; SENHAJI, M.; LYNGSIE, K.S. On a combination of the 1-2-3 conjecture and the antimagic labeling conjecture. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, v. 19, n. 1, p. 201, 2019.
- [5] HARTSFIELD, N.; RINGEL, G. *Pearls in Graph Theory: A Comprehensive Introduction*. Boston: Academic Press, Inc., 1994.
- [6] HASLEGRAVE, J. Proof of a local antimagic conjecture. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, v. 20, n. 1, 2018.
- [7] VENTURA, L.R.; BRONDANI, A.E.; FRANÇA, F.A.M. Número cromático antimágico local dos grafos firefly. *REMAT: Revista Eletrônica da Matemática*, v. 10, e4005, 2024.

Extensões Controláveis

Kostiantyn Iusenko

Roger Primolan*

Instituto de Matemática e Estatística, USP

R. do Matão, 1010, Butantã

05508-090, São Paulo, SP

E-mail: roger.primolan@usp.br

RESUMO

10 a 12 de setembro de 2025

Álgebra homológica e seus métodos formam uma técnica aplicada em várias áreas de álgebra. Através de suas conexões com teoria de módulos, álgebra comutativa, teoria de categoria, entre outras, seu estudo é central para diversas linhas de pesquisa. Este trabalho foca no estudo de \mathbb{k} -álgebras associativas de dimensão finita sob a perspectiva de álgebra homológica relativa

Uma abordagem que vem produzindo diversos resultados é a de obter reduções para essas conjecturas através do estudo de extensões de álgebras $B \subseteq A$. Esses tipos de resultados são motivados pelo seguinte questionamento: quando uma conjectura/pergunta vale para A se, e somente se, vale para B ? Algumas dessas técnicas de redução utilizam a finitude de invariantes relativos à extensão em si, definidos através da teoria desenvolvida em [2]. Porém o cálculo desses invariantes é mais complexo do que os presentes na teoria clássica e, em [1], foi perguntado como construir exemplos de extensões para as quais os invariantes podem ser computados.

Este trabalho, portanto, se propõe a construir tais exemplos. Através da introdução de uma nova classe de extensões, chamadas de *extensões controláveis*, como aquelas que satisfazem a seguinte igualdade

$$\text{gldim}(A, B) = \text{gldim}\left(\frac{A}{AJ(B)A}\right),$$

foi-se obtido um resultado que garante que o funtor $(A/AJ(B)A)\text{-mod} \rightarrow A\text{-mod}$ transfira os objetos de álgebra homológica clássica de $A/AJ(B)A$ para suas contrapartes relativas à extensão $B \subseteq A$. Esse resultado é aplicado para gerar diversos exemplos, com destaque para a classificação dos valores de $\text{gldim}(A, B)$ para álgebras de dimensão finitas locais tais que $AJ(B)$ é um ideal bilateral de A e a determinação de condições suficientes nas extensões $B \subseteq A$ e $D \subseteq C$ para garantir que

$$\text{gldim}(A \otimes_{\mathbb{k}} C, B \otimes_{\mathbb{k}} D) = \text{gldim}(A, B) + \text{gldim}(C, D).$$

Referências

- [1] GUO, S. Relative global dimensions of extensions. *Communications in Algebra*, v. 46, n. 5, p. 2089-2108, 2018.
- [2] HOCHSCHILD, G. Relative homological algebra. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 82, n. 1, p. 246-269, 1956.

*Este trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

O Impacto da Tecnologia no Ensino da Matemática: Uma Análise Estatística Multivariada Comparativa entre Metodologias Tradicionais e Inovadoras na Educação Básica

Regina Serrão Lanzillotti

Rogério Vaz de Almeida Jr.

Departamento de Ciências Computacionais e Modelagem Matemática, UERJ
 Rua São Francisco Xavier, 524 – Campus Maracanã – Pavilhão João Lyra Filho, 6º andar
 20.550-900, Rio de Janeiro, RJ
 E-mail: reginalanzillotti@ime.uerj.br rogerio.almeida@pos.ime.uerj.br

RESUMO

Este artigo apresenta uma análise estatística comparativa entre duas abordagens de ensino de matemática aplicadas em uma escola da rede estadual de ensino do estado do Rio de Janeiro: o método tradicional e uma metodologia inovadora baseada em recursos tecnológicos, como softwares de geometria dinâmica e gamificação. A pesquisa objetiva evidenciar o impacto do uso de tecnologias alternativas no desempenho dos estudantes do ensino médio. As notas referentes às avaliações de mesmo conteúdo programático foram analisadas para verificar se há diferença significativa entre as metodologias. Os resultados apontam para uma melhoria consistente no rendimento dos alunos expostos ao ensino tecnológico, reforçando as diretrizes da BNCC quanto à incorporação de ferramentas digitais e ao desenvolvimento do pensamento computacional no ambiente escolar.

METODOLOGIA

Neste artigo abordou-se duas etapas principais: a primeira, denominada pré-processamento, foi dividida em seleção da unidade de ensino (UE), seleção da plataforma para elaboração dos conteúdos digitais inovadores e confecção dos planos de aula. A segunda, denominada processamento, contou com a seleção de turmas, aplicação dos planos de aula, obtenção dos resultados das avaliações e análise inferencial estatística multivariada. A explicitação das abordagens pedagógicas e as etapas são apresentadas no fluxograma da figura 1.

A linguagem de programação Python foi utilizada na geração dos resultados, pois possui bibliotecas que facilitam a obtenção das medidas estatísticas e a construção de gráficos. Os módulos do Python utilizados foram o numpy, o Scipy.spatial e o matplotlib.

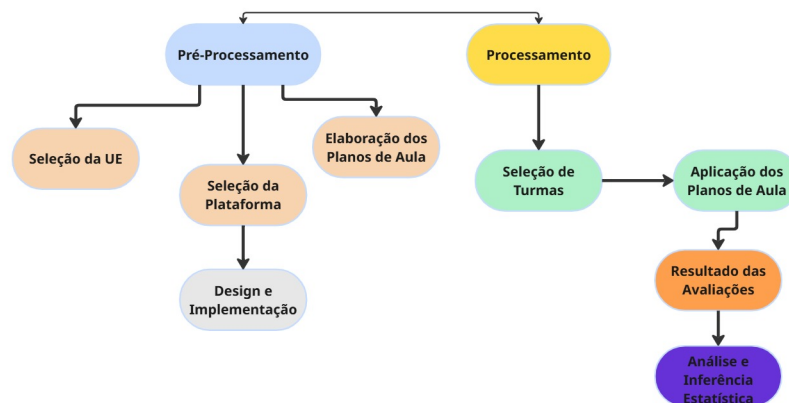


Figura 1: Metodologia Utilizada

RESULTADOS

Os resultados obtidos neste estudo evidenciaram, de forma estatisticamente fundamentada, que a utilização de uma metodologia inovadora, baseada em tecnologias educacionais e práticas interativas, contribuiu significativamente para a melhoria do desempenho dos estudantes da educação básica em matemática. A comparação entre as notas das avaliações aplicadas sob diferentes abordagens pedagógicas demonstrou que os alunos participantes de aulas com uso de plataformas educacionais como GeoGebra Classroom e atividades gamificadas desenvolvidas no EducaPlay apresentaram médias superiores e menor dispersão nos resultados, em relação àqueles que foram submetidos exclusivamente ao método tradicional de ensino.

A análise estatística, conduzida por meio de medidas de tendência central, variabilidade, matriz de covariância e distância de Mahalanobis, reforça a hipótese de que o uso consciente e planejado de recursos digitais promove um ambiente de aprendizagem mais dinâmico, acessível e eficaz. Além disso, o uso da interatividade, dos exemplos práticos e da gamificação mostrou-se promissor no engajamento e na motivação dos estudantes, o que favorece a construção ativa do conhecimento matemático.

Os resultados apresentados mostraram-se em consonância com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que destaca a importância da tecnologia e do pensamento computacional no processo de ensino-aprendizagem, e sinalizam a necessidade de transformação das práticas pedagógicas ainda pautadas por modelos essencialmente expositivos e pouco contextualizados.

Referências

- [1] Aguiar Castillo, Lidia; Clavijo-Rodríguez, Alberto; Hernández-López, Lidia; De Saa-Pérez, Petra ; Pérez-Jiménez, Rafael. *Gamification and deep learning approaches in higher education*. Journal of Hospitality, Leisure, Sport Tourism and Education, 2021.
- [2] Atin, Sufa; Abdan, Raihan Syakuran; Afrianto, Irawan *Implementation of Gamification in Mathematics m-Learning Application to Creating Student Engagement*. International Journal of Advanced Computer Science and Applications, 2022.
- [3] Chaves Neto, Anselmo *Análise Multivariada Aplicada à Pesquisa*. Universidade Federal do Paraná - Notas de Aula, 2025.
- [4] López,Ivan M. G.; Acosta, Elizabeth Gonzaga; Fabiola R., Elena *Ivestigating The Impact of Gamification on Student Motivation, Engagement, and Performance*. Education Sciences, 2023.
- [5] Likert, R. *A Technique for the Measurement of Attitudes*. *Archives of Psychology*.. Addison-Wesley, 1932.
- [6] Mood, A.M.; Graybill, F.A.; Boes, D.C. *Introduction to the theory of Statistics*. McGraw Hill, New York.
- [7] Ojeda, Carlos Aparecido Ajala Miola; Adriana, Fátima de Souza. *Ensino de Geometria Espacial por meio do Geogebra: uma experiência envolvendo a relação de Euler*. Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, 2024.
- [8] Pedra, Rodrigo Rodrigues; Silva, Cristiane Campos da; Silva, Osileide Barreira da; Brito, Rodrigo Maldonado Guimarães; Bravo, Sheila Veronica *Impacto da Gamificação na Qualidade da Educação Infantil em Escolas Públicas*. Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação, 2024.
- [9] Silva, Cleide Chapelem; Costa, Rosimere *Metodologias Tradicionais e Inovadoras: um estudo comparativo*. Centro Universitário São José- Faculdade de Pedagogia, 2022.

O Mecanismo de Atenção em Transformers: Uma Perspectiva Matemática

Sheila Rodrigues de Almeida*

Escola de Engenharia Industrial Metalúrgica de Volta Redonda, UFF
Av. dos Trabalhadores, 420
27255-125, Volta Redonda, RJ
E-mail: sheilaa@id.uff.br

Beatriz Cardoso Nascimento

Instituto de Computação, UNICAMP
Av. Albert Einstein, 1251
13083-88, Campinas, SP
E-mail: b247403@dac.unicamp.br

RESUMO

Os Grandes Modelos de Linguagem (LLMs) têm avançado rapidamente nos últimos anos, exibindo capacidades cada vez mais sofisticadas em diversas tarefas [1, 2, 4]. A base para muitos desses avanços reside na arquitetura Transformer, introduzida por Vaswani et al. [3], que revolucionou o processamento de linguagem natural e se tornou um pilar dos LLMs modernos. No cerne desta arquitetura está o mecanismo de atenção, um conceito matematicamente elegante que permite ao modelo ponderar a importância de diferentes partes dos dados de entrada ao produzir uma saída. Esta palestra visa desmistificar o mecanismo de atenção para um público de graduação em matemática, focando em seus fundamentos e na intuição por trás de suas operações.

Abordaremos o *scaled dot-product attention*, a principal componente do bloco de atenção. A apresentação detalhará como as matrizes de entrada são transformadas em três representações distintas: Consulta (Query - Q), Chave (Key - K) e Valor (Value - V), através de multiplicações por matrizes de peso treináveis. A essência do mecanismo de atenção reside no cálculo de uma pontuação de similaridade entre um vetor de Consulta e todos os vetores de Chave, utilizando o produto escalar. Essas pontuações são escalonadas e transformadas em uma distribuição de probabilidade (pesos de atenção) pela função softmax. O resultado final é uma soma ponderada dos vetores de Valor, guiada por esses pesos.

Compreender este mecanismo em seu nível matemático fundamental é, portanto, crucial para entender não apenas como os Transformers funcionam, mas também por que eles foram tão eficazes em escalar e impulsionar a recente onda de inovação em inteligência artificial.

Referências

- [1] Grattafiori, A., Dubey, A., Jauhri, A., Pandey, A., Kadian, A., Al-Dahle, A., Letman, A., Mathur, A., Schelten, A., Vaughan, A., et al.: The llama 3 herd of models. arXiv preprint arXiv:2407.21783 (2024)
- [2] Malartic, Q., Chowdhury, N.R., Cojocaru, R., Farooq, M., Campesan, G., Djilali, Y.A.D., Narayan, S., Singh, A., Velikanov, M., Boussaha, B.E.A., et al.: Falcon2-11b technical report. arXiv preprint arXiv:2407.14885 (2024)
- [3] Vaswani, A., Shazeer, N., Parmar, N., Uszkoreit, J., Jones, L., Gomez, A.N., Kaiser, Ł., Polosukhin, I.: Attention is all you need. *Advances in neural information processing systems* **30** (2017)
- [4] Zhao, W.X., Zhou, K., Li, J., Tang, T., Wang, X., Hou, Y., Min, Y., Zhang, B., Zhang, J., Dong, Z., et al.: A survey of large language models. arXiv preprint arXiv:2303.18223 **1**(2) (2023)

*Bolsista CAPES

Parcerias e patrocinadores

O XI Simpósio de Matemática da Região Sul Fluminense contou com o financiamento da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ); apoio institucional da Pró-Reitoria de Extensão da UFF (PROEX) com doação de material para os participantes, empréstimo de suportes para pôsteres, divulgação do evento, auxílio no controle de presença e emissão de certificados através do SIAEX; apoio da SBMAC na divulgação e SBM na divulgação e doação de livros para serem sorteados durante o evento. A todos que puderam nos ajudar na organização do simpósio, nosso sincero agradecimento.

