A caraterística de Euler

Matias del Hoyo (UFF)

VI SIMMA, Agosto 2020

1. História / Motivação

Sólidos Platônicos

Tetraedro

Cubo

Octaedro

Dodecaedro

Icosaedro

Sólidos Platônicos

Tetraedro Cubo Octaedro Dodecaedro Icosaedro

- Classificados por Teeteto ∼400 AC. Não há outros!!

Sólidos Platônicos

Tetraedro

Cubo

Octaedro

Dodecaedro

Icosaedro

- Classificados por Teeteto ∼400 AC. Não há outros!!
- Associados aos elementos na filosofia de Platão.

Sólidos Platônicos

Tetraedro Cubo Octaedro Dodecaedro Icosaedro

- Classificados por Teeteto $\sim$400 AC. Não há outros!!
- Associados aos elementos na filosofia de Platão.
- Estudo detalhado nos *Elementos* de Euclides, livro XIII

Sólidos Platônicos

Tetraedro Cubo Octaedro Dodecaedro Icosaedro

- Classificados por Teeteto ∼400 AC. Não há outros!!
- Associados aos elementos na filosofia de Platão.
- Estudo detalhado nos *Elementos* de Euclides, livro XIII
- Usados por Kepler em 1596 num modelo para o sistema solar.

Fórmula de Euler (1751)

	Vertices (V)	Arestas (A)	Faces (F)	(V-A+F)
Tetraedro	4	6	4	2
Cubo	8	12	6	2
Octaedro	6	12	8	2
Dodecaedro	20	30	12	2
Icosaedro	12	30	20	2

Fórmula de Euler (1751)

	Vertices (V)	Arestas (A)	Faces (F)	(V-A+F)
Tetraedro	4	6	4	2
Cubo	8	12	6	2
Octaedro	6	12	8	2
Dodecaedro	20	30	12	2
Icosaedro	12	30	20	2

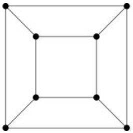
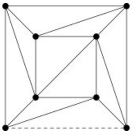
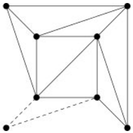
Teorema:
A fórmula $V - A + F = 2$ e válida para todo poliedro esférico.

Fórmula de Euler (1751)

	Vertices (V)	Arestas (A)	Faces (F)	(V-A+F)
Tetraedro	4	6	4	2
Cubo	8	12	6	2
Octaedro	6	12	8	2
Dodecaedro	20	30	12	2
Icosaedro	12	30	20	2

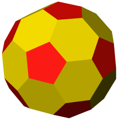
Teorema:
A fórmula $V - A + F = 2$ e válida para todo poliedro esférico.

Prova:

Número de Euler

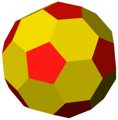
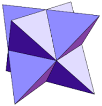
O número de Euler $\chi(P) = V - A + F$ de alguns outros poliedros:



2

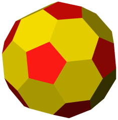
Número de Euler

O número de Euler $\chi(P) = V - A + F$ de alguns outros poliedros:

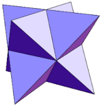
 2  2

Número de Euler

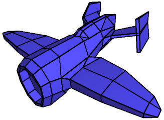
O número de Euler $\chi(P) = V - A + F$ de alguns outros poliedros:



2



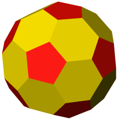
2



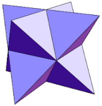
2

Número de Euler

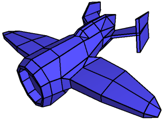
O número de Euler $\chi(P) = V - A + F$ de alguns outros poliedros:



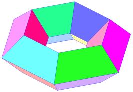
2



2



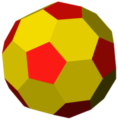
2



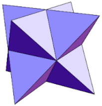
0

Número de Euler

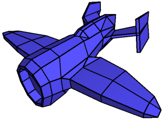
O número de Euler $\chi(P) = V - A + F$ de alguns outros poliedros:



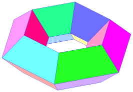
2



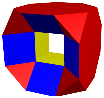
2



2



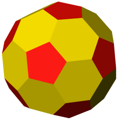
0

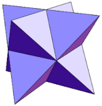


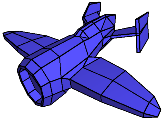
0

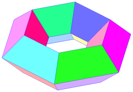
Número de Euler

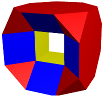
O número de Euler $\chi(P) = V - A + F$ de alguns outros poliedros:

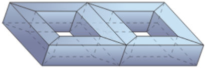

2


2


2

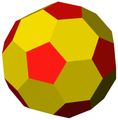

0

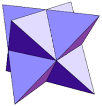

0

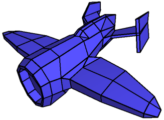

-2

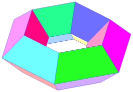
Número de Euler

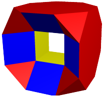
O número de Euler $\chi(P) = V - A + F$ de alguns outros poliedros:

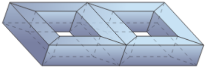

2


2


2


0


0


-2

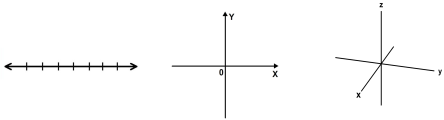
O número de Euler não depende da triangulação.
Mede alguma coisa do espaço que está por trás.

Como formalizar / generalizar isso?

2. Homologia simplicial e números de Betti

Poliedros

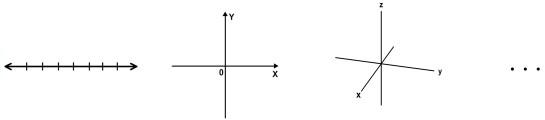
O espaço euclídeo $\mathbb{R}^n$ e nosso modelo de espaço de n dimensões



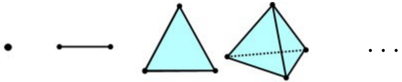
$\ldots$

Poliedros

O espaço euclídeo $\mathbb{R}^n$ e nosso modelo de espaço de n dimensões

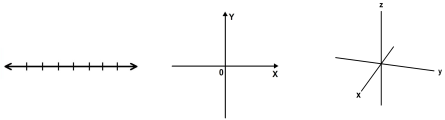


Um n-simplex é o feixo convexo de $n+1$ pontos em $\mathbb{R}^n$



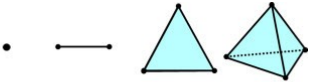
Poliedros

O espaço euclídeo $\mathbb{R}^n$ e nosso modelo de espaço de n dimensões



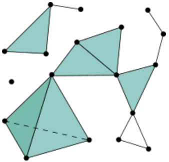
. . .

Um n-simplex é o feixo convexo de $n+1$ pontos em $\mathbb{R}^n$



. . .

Um poliedro P e uma colagem de símplices pelas suas caras



Homologia simplicial

P poliedro (vértices ordenados)

Homologia simplicial

P poliedro (vértices ordenados)
Espaço de k-símplices:

$$S_k(P) = \left\{ \sum_i \lambda_i \sigma_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, \sigma_i \text{ } k\text{-simplex} \right\}$$

Homologia simplicial

P poliedro (vértices ordenados)

Espaço de k-símplices:

$$S_k(P) = \left\{ \sum_i \lambda_i \sigma_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, \sigma_i \ k\text{-simplex} \right\}$$

Operador de bordo:

$$\partial : S_k(P) \to S_{k-1}(P) \quad \partial(\sigma) = \sum_i (-1)^i (\text{face } i\text{-ésima de } \sigma) \quad \partial^2 = 0$$

Homologia simplicial

P poliedro (vértices ordenados)

Espaço de k-símplices:

$$S_k(P) = \left\{ \sum_i \lambda_i \sigma_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, \sigma_i \ k\text{-simplex} \right\}$$

Operador de bordo:

$$\partial : S_k(P) \to S_{k-1}(P) \quad \partial(\sigma) = \sum_i (-1)^i (\text{face } i\text{-ésima de } \sigma) \quad \partial^2 = 0$$

Homologia:

$$H_k(P) = \frac{k - \text{ciclos}}{k - \text{bordos}}$$

onde $c \in S_k(P)$ é ciclo se $\partial(c) = 0$ e é bordo se $c = \partial(d)$.

Homologia simplicial

P poliedro (vértices ordenados)

Espaço de k-símplices:

$$S_k(P) = \left\{ \sum_i \lambda_i \sigma_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, \sigma_i \ k\text{-simplex} \right\}$$

Operador de bordo:

$$\partial : S_k(P) \to S_{k-1}(P) \quad \partial(\sigma) = \sum_i (-1)^i (\text{face } i\text{-ésima de } \sigma) \quad \partial^2 = 0$$

Homologia:

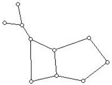
$$H_k(P) = \frac{k - \text{ciclos}}{k - \text{bordos}}$$

onde $c \in S_k(P)$ é ciclo se $\partial(c) = 0$ e é bordo se $c = \partial(d)$.

O número de Betti $b_k = dim(H_k(P))$ conta os k-buracos de P.

Números de Betti e caraterística de Euler

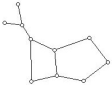
Exemplos:



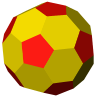
$b_0 = 1 \quad b_1 = 2$

Números de Betti e caraterística de Euler

Exemplos:



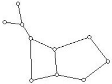
$b_0 = 1 \quad b_1 = 2$



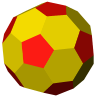
$b_0 = 1 \quad b_1 = 0 \quad b_2 = 1$

Números de Betti e caraterística de Euler

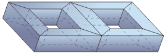
Exemplos:



$b_0 = 1 \quad b_1 = 2$



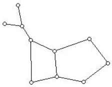
$b_0 = 1 \quad b_1 = 0 \quad b_2 = 1$



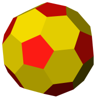
$b_0 = 1 \quad b_1 = 4 \quad b_2 = 1$

Números de Betti e caraterística de Euler

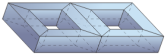
Exemplos:



$b_0 = 1 \quad b_1 = 2$



$b_0 = 1 \quad b_1 = 0 \quad b_2 = 1$

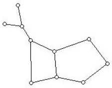


$b_0 = 1 \quad b_1 = 4 \quad b_2 = 1$

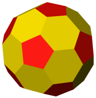
Prop: $\chi(P) = \sum_n (-1)^n \#\{n - \text{símplices}\} = \sum_k (-1)^k b_k$.

Números de Betti e caraterística de Euler

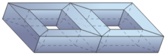
Exemplos:



$b_0 = 1 \quad b_1 = 2$



$b_0 = 1 \quad b_1 = 0 \quad b_2 = 1$



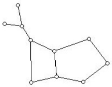
$b_0 = 1 \quad b_1 = 4 \quad b_2 = 1$

Prop: $\chi(P) = \sum_n (-1)^n \#\{n - \text{símplices}\} = \sum_k (-1)^k b_k.$

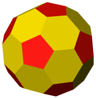
Dois poliedros são equivalentes se se relacionam por subdivisão.

Números de Betti e caraterística de Euler

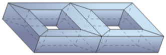
Exemplos:



$b_0 = 1 \quad b_1 = 2$



$b_0 = 1 \quad b_1 = 0 \quad b_2 = 1$



$b_0 = 1 \quad b_1 = 4 \quad b_2 = 1$

Prop: $\chi(P) = \sum_n (-1)^n \#\{n - \text{símplices}\} = \sum_k (-1)^k b_k.$

Dois poliedros são equivalentes se se relacionam por subdivisão.

Teorema: Os números de Betti são invariantes por subdivisão.

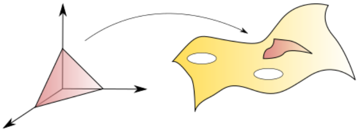
3. Homologia singular

Homologia singular

X espaço topológico abstrato (e.g. $X \subset \mathbb{R}^n$)

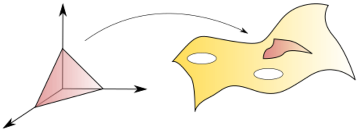
Homologia singular

X espaço topológico abstrato (e.g. $X \subset \mathbb{R}^n$)
Um *k-simplex singular* é uma função contínua $f : \Delta^k \to X$.



Homologia singular

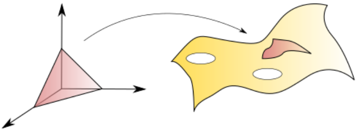
X espaço topológico abstrato (e.g. $X \subset \mathbb{R}^n$)
Um k-simplex singular é uma função contínua $f : \Delta^k \to X$.



Podemos definir espaço de k-simplices $S_k(X)$, operador de bordo ∂ e homologia singular $H_k(X)$ como antes.

Homologia singular

X espaço topológico abstrato (e.g. $X \subset \mathbb{R}^n$)
Um k-simplex singular é uma função contínua $f : \Delta^k \to X$.

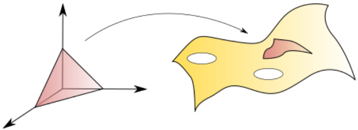


Podemos definir espaço de k-simplices $S_k(X)$, operador de bordo ∂ e homologia singular $H_k(X)$ como antes.

$\Rightarrow$ números de Betti $b_k(X)$ e caraterística de Euler $\chi(X)$.

Homologia singular

X espaço topológico abstrato (e.g. $X \subset \mathbb{R}^n$)
Um k-simplex singular é uma função contínua $f : \Delta^k \to X$.



Podemos definir espaço de k-simplices $S_k(X)$, operador de bordo ∂ e homologia singular $H_k(X)$ como antes.

$\Rightarrow$ números de Betti $b_k(X)$ e caraterística de Euler $\chi(X)$.

Ok... mas há ∞ símplices singulares, como calculamos isso?

Invariança topológica

X, Y são homeomorfos se existe bijeção $f : X \to Y$ contínua com inversa contínua.

Invariança topológica

X, Y são homeomorfos se existe bijeção $f : X \to Y$ contínua com inversa contínua.

✓ expandir, contrair, torcer

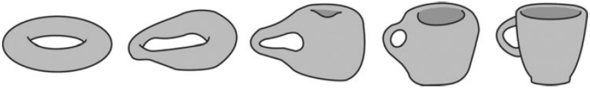
✗ cortar, furar, colapsar

Invariança topológica

X, Y são homeomorfos se existe bijeção $f : X \to Y$ contínua com inversa contínua.

✓ expandir, contrair, torcer

✗ cortar, furar, colapsar



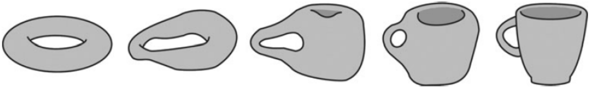
Um topólogo é alguém
que não distingue uma donut duma caneca de café

Invariança topológica

X, Y são homeomorfos se existe bijeção $f : X \to Y$ contínua com inversa contínua.

✓ expandir, contrair, torcer

✗ cortar, furar, colapsar

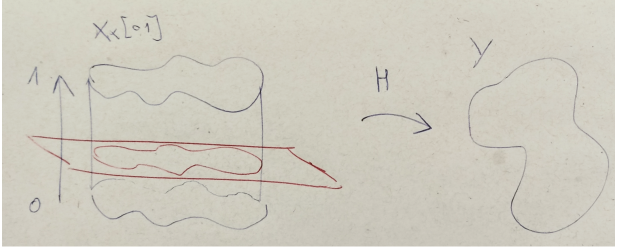


Um topólogo é alguém
que não distingue uma donut duma caneca de café

Fato: X, Y homeomorfos $\Rightarrow b_k(X) = b_k(Y)$, $\chi(X) = \chi(Y)$.

Homotopia

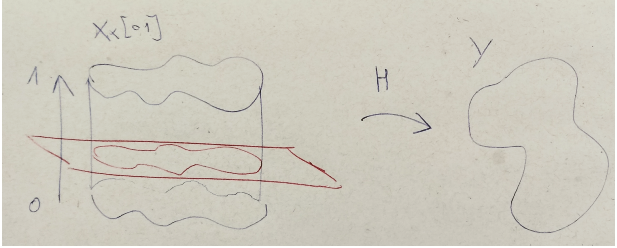
Uma homotopia entre $f, g : X \to Y$ é uma deformação contínua.



$$H : X \times [0,1] \to Y \qquad H(x,0) = f(x) \quad H(x,1) = g(x)$$

Homotopia

Uma homotopia entre $f, g : X \to Y$ é uma deformação contínua.

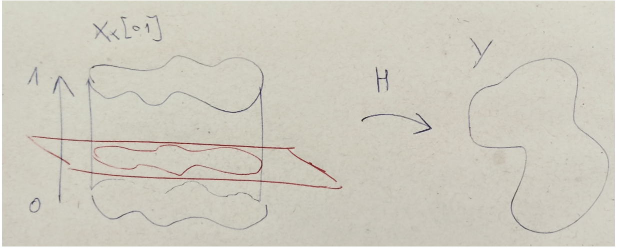


$$H : X \times [0,1] \to Y \qquad H(x,0) = f(x) \quad H(x,1) = g(x)$$

X, Y são homotópicos se há $f : X \to Y$ invertível mod homotopia

Homotopia

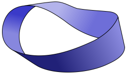
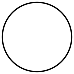
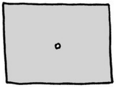
Uma homotopia entre $f, g : X \to Y$ é uma deformação contínua.



$$H : X \times [0,1] \to Y \qquad H(x,0) = f(x) \quad H(x,1) = g(x)$$

X, Y são homotópicos se há $f : X \to Y$ invertível mod homotopia

Exemplos:

 $\cong$ $\bullet$  $\cong$  $\cong$ 

Propriedades fundamentais da homologia singular

1. **Aditividade:** X_i flia de espaços $\Rightarrow H_k(\coprod_i X_i) = \oplus_i H_k(X_i)$

Propriedades fundamentais da homologia singular

1. **Aditividade:** X_i flia de espaços $\Rightarrow H_k(\coprod_i X_i) = \oplus_i H_k(X_i)$
2. **Invariança homotópica:** X, Y homotópicos $\Rightarrow$ $H_k(X) = H_k(Y)$

Propriedades fundamentais da homologia singular

1. **Aditividade:** X_i flia de espaços $\Rightarrow H_k(\coprod_i X_i) = \oplus_i H_k(X_i)$

2. **Invariança homotópica:** X, Y homotópicos $\Rightarrow$ $H_k(X) = H_k(Y)$

3. **Mayer-Vietoris:** $U, V \subset X$ abertos, $X = U \cup V \Rightarrow$ sequência exata

$$\cdots \to H_k(U \cap V) \to H_k(U) \oplus H_k(V) \to H_k(X) \xrightarrow{\delta} H_{k-1}(U \cap V) \to \cdots$$

Propriedades fundamentais da homologia singular

1. **Aditividade:** X_i flia de espaços $\Rightarrow H_k(\coprod_i X_i) = \oplus_i H_k(X_i)$

2. **Invariança homotópica:** X, Y homotópicos $\Rightarrow$ $H_k(X) = H_k(Y)$

3. **Mayer-Vietoris:** $U, V \subset X$ abertos, $X = U \cup V \Rightarrow$ sequência exata

$$\cdots \to H_k(U \cap V) \to H_k(U) \oplus H_k(V) \to H_k(X) \xrightarrow{\delta} H_{k-1}(U \cap V) \to \cdots$$

Se os espaços são bons (varieadades, CW-complexos) então essas três propriedades caraterizam a homologia

Propriedades fundamentais da homologia singular

1. **Aditividade:** X_i flia de espaços $\Rightarrow H_k(\coprod_i X_i) = \oplus_i H_k(X_i)$
2. **Invariança homotópica:** X, Y homotópicos $\Rightarrow$ $H_k(X) = H_k(Y)$
3. **Mayer-Vietoris:** $U, V \subset X$ abertos, $X = U \cup V \Rightarrow$ sequência exata

   $$\cdots \to H_k(U \cap V) \to H_k(U) \oplus H_k(V) \to H_k(X) \xrightarrow{\delta} H_{k-1}(U \cap V) \to \cdots$$

Se os espaços são bons (varieadades, CW-complexos) então essas três propriedades caraterizam a homologia

$\rightsquigarrow$ axiomatização de homologia

Nervo duma cobertura

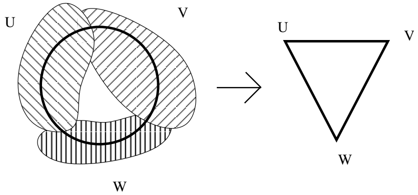
$\mathcal{U} = \{U_i\}$ cobertura por abertos de X, o nervo $N(X, \mathcal{U})$ é poliedro com

1. vértices: abertos da cobertura;
2. símplices: abertos com interseção não trivial.

Nervo duma cobertura

$\mathcal{U} = \{U_i\}$ cobertura por abertos de X, o nervo $N(X,\mathcal{U})$ é poliedro com

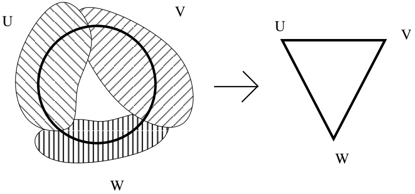
1. vértices: abertos da cobertura;
2. símplices: abertos com interseção não trivial.



Nervo duma cobertura

$\mathcal{U} = \{U_i\}$ cobertura por abertos de X, o nervo $N(X,\mathcal{U})$ é poliedro com

1. vértices: abertos da cobertura;
2. símplices: abertos com interseção não trivial.

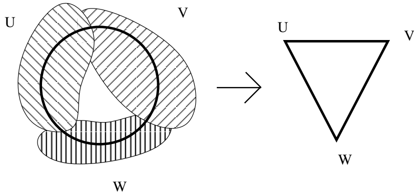


Teorema: Interseções finitas contráteis $\Rightarrow H_k(X) = H_k(N(X,\mathcal{U}))$.

Nervo duma cobertura

$\mathcal{U} = \{U_i\}$ cobertura por abertos de X, o nervo $N(X,\mathcal{U})$ é poliedro com

1. vértices: abertos da cobertura;
2. símplices: abertos com interseção não trivial.



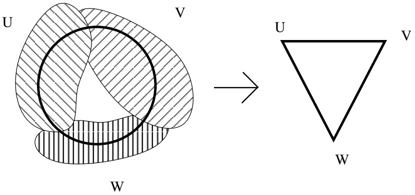
Teorema: Interseções finitas contráteis $\Rightarrow H_k(X) = H_k(N(X,\mathcal{U}))$.

Prova: Aditividade + Invariança homotópica + MV

Nervo duma cobertura

$\mathcal{U} = \{U_i\}$ cobertura por abertos de X, o nervo $N(X,\mathcal{U})$ é poliedro com

1. vértices: abertos da cobertura;
2. símplices: abertos com interseção não trivial.



Teorema: Interseções finitas contráteis $\Rightarrow H_k(X) = H_k(N(X,\mathcal{U}))$.

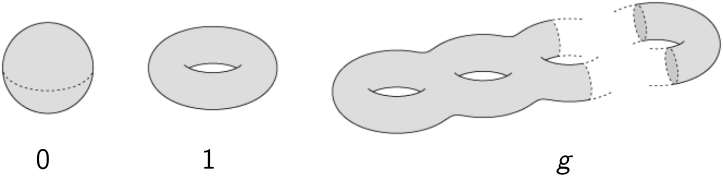
Prova: Aditividade + Invariança homotópica + MV

Corolário: P poliedro $\Rightarrow$ homologia é igual a homologia singular.

4. Exemplos de resultados

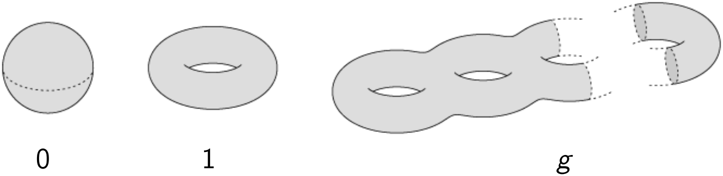
Teoremas de classificação

Teorema: Uma variedade S de dimensão 2 (superfície) compacta orientável é homeomorfa a um toro com $g = 1 - \chi(S)/2$ buracos



Teoremas de classificação

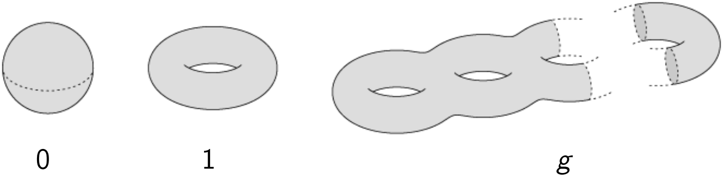
Teorema: Uma variedade S de dimensão 2 (superfície) compacta orientável é homeomorfa a um toro com $g = 1 - \chi(S)/2$ buracos



Em dimensões maiores uma classificação é muito difícil.

Teoremas de classificação

Teorema: Uma variedade S de dimensão 2 (superfície) compacta orientável é homeomorfa a um toro com $g = 1 - \chi(S)/2$ buracos

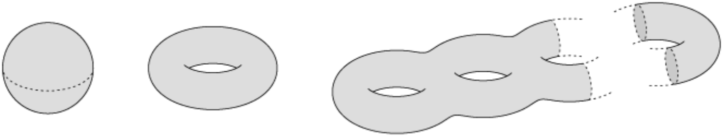


Em dimensões maiores uma classificação é muito difícil.

Conjectura de Poincare (∼1900): S variedade de dim. 3 compacta, orientável, simpl. conexa, $b_k(S) = b_k(S^3) \Rightarrow S \cong S^3$?

Teoremas de classificação

Teorema: Uma variedade S de dimensão 2 (superfície) compacta orientável é homeomorfa a um toro com $g = 1 - \chi(S)/2$ buracos



0 1 g

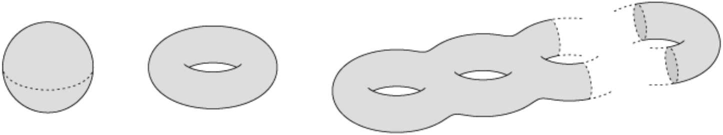
Em dimensões maiores uma classificação é muito difícil.

Conjectura de Poincare (∼1900): S variedade de dim. 3 compacta, orientável, simpl. conexa, $b_k(S) = b_k(S^3) \Rightarrow S \cong S^3$?

Ressolvida em 2002/3 por Perelman.

Teoremas de classificação

Teorema: Uma variedade S de dimensão 2 (superfície) compacta orientável é homeomorfa a um toro com $g = 1 - \chi(S)/2$ buracos



0 1 g

Em dimensões maiores uma classificação é muito difícil.

Conjectura de Poincare ($\sim$1900): S variedade de dim. 3 compacta, orientável, simpl. conexa, $b_k(S) = b_k(S^3) \Rightarrow S \cong S^3$?

Ressolvida em 2002/3 por Perelman. Rejeitou U\$D 1 milhão!!!

Teoremas do ponto fixo

Teorema de Lefschetz (1926): Se X é um espaço compacto com $\chi(X) \neq 0$ e $f : X \to X$ é contínua e homotópica a id_X então X tem pelo menos um ponto fixo.

Teoremas do ponto fixo

Teorema de Lefschetz (1926): Se X é um espaço compacto com $\chi(X) \neq 0$ e $f : X \to X$ é contínua e homotópica a id_X então X tem pelo menos um ponto fixo.

Corolário (Teorema de Brouwer): Se $D \subset \mathbb{R}^n$ é fechado e convexo então toda função $f : D \to D$ tem que ter um ponto fixo.

Teoremas do ponto fixo

Teorema de Lefschetz (1926): Se X é um espaço compacto com $\chi(X) \neq 0$ e $f : X \to X$ é contínua e homotópica a id_X então X tem pelo menos um ponto fixo.

Corolário (Teorema de Brouwer): Se $D \subset \mathbb{R}^n$ é fechado e convexo então toda função $f : D \to D$ tem que ter um ponto fixo.

Após revolver o café sempre há uma gota no mesmo lugar que ao princípio

Teoremas do ponto fixo II

Um campo de vetores numa variedade $X \subset \mathbb{R}^n$ associa para cada ponto um vetor tangente nesse ponto.

Teoremas do ponto fixo II

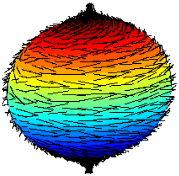
Um campo de vetores numa variedade $X \subset \mathbb{R}^n$ associa para cada ponto um vetor tangente nesse ponto.

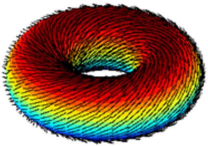
Teorema de Poincare-Hopf (1895?): Se X é um espaço com $\chi(X) \neq 0$ então todo campo de vetores em X tem que ter um cero.

Teoremas do ponto fixo II

Um campo de vetores numa variedade $X \subset \mathbb{R}^n$ associa para cada ponto um vetor tangente nesse ponto.

Teorema de Poincare-Hopf (1895?): Se X é um espaço com $\chi(X) \neq 0$ então todo campo de vetores em X tem que ter um cero.

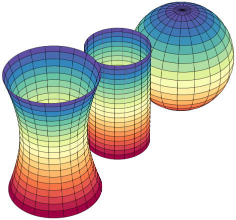




Não dá para pentear uma bola mas sim podemos pentear um toro

Teorema de Gauss-Bonnet

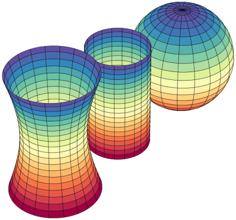
A curvatura $K = k_1 k_2$ duma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ num ponto x é o determinante da forma quadrática que melhor aproxima ela.



$K < 0 \quad K = 0 \quad K > 0$

Teorema de Gauss-Bonnet

A curvatura $K = k_1 k_2$ duma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ num ponto x é o determinante da forma quadrática que melhor aproxima ela.

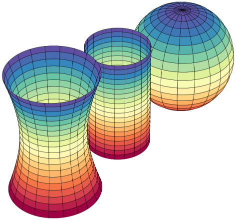


$K < 0 \quad K = 0 \quad K > 0$

Teorema de Gauss-Bonnet (1848): $\frac{1}{2\pi} \int_M K dA = \chi(S)$

Teorema de Gauss-Bonnet

A curvatura $K = k_1 k_2$ duma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ num ponto x é o determinante da forma quadrática que melhor aproxima ela.



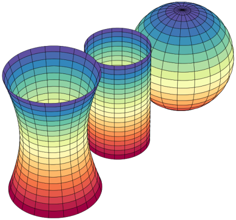
$K < 0 \quad K = 0 \quad K > 0$

Teorema de Gauss-Bonnet (1848): $\frac{1}{2\pi} \int_M K dA = \chi(S)$

Generalização para dimensões altas – geometria Riemanniana.

Teorema de Gauss-Bonnet

A curvatura $K = k_1 k_2$ duma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ num ponto x é o determinante da forma quadrática que melhor aproxima ela.



$K < 0 \quad K = 0 \quad K > 0$

Teorema de Gauss-Bonnet (1848): $\frac{1}{2\pi} \int_M K dA = \chi(S)$

Generalização para dimensões altas – geometria Riemanniana.

Versao combinatória para poliedros por Descartes usando defeito angular em 1650!

Obrigado!